



ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ИХ ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

1988

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ИХ
ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

(Тезисы докладов Второго
всесоюзного научного семинара
Тарту, 26-28 января 1988 г.)

ТАРТУ 1988

УДК 530.12:531.51+539.12

В расширенных тезисах Второго всесоюзного семинара "Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация", вошедших в настоящий сборник, обсуждается широкий круг вопросов, связанных с нахождением и анализом новых точных решений уравнений Эйнштейна и уравнений гравитационного поля в других теориях гравитации, с применением точных решений в различных задачах астрофизики и космологии, а также с анализом некоторых проблем супергравитации.

Редакционная коллегия:

канд.физ.-мат.наук, доцент И.Р.Пийр (отв. редактор)
канд.физ.-мат.наук, доцент А.А.Коппель
канд.физ.-мат.наук, П.Х.Кууск
канд.физ.-мат.наук, Р.Р.Таммело
преп. А.А.Ихерманн (секретарь)

Ark.

KUSTUTATUD

Tartu Riikliku
Matematuukogu

9965

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ИХ
ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
Тезисы докладов второго всесоюзного научного семинара.
Тарту, 26-28 января 1988г.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Вийкооли, 18.
Ответственный редактор И. Пийр.
Подписано к печати 7.01.1988.
МВ 00156.
Формат 60x84/16.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Роталпринт.
Условно-печатных листов 7,44.
Учетно-издательских листов 7,04. Печатных листов 8,0.
Тираж 200.
Заказ № 1102.
Цена 45 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

СОДЕРЖАНИЕ

Г.А.Алексеев. О голоморфных функциях, параметризующих общее решение электровакуумных уравнений Эйнштейна-Максвелла с изометриями	6
А.Т.Ильичев. О симметриях уравнений Робинсона-Траутмана для осесимметричных полей	10
С.Л.Парновский. Векторное поле вокруг бесконечной нити	13
С.Л.Парновский. Физическая интерпретация метрики Ван Штокума	16
М.Н.Зарипов. Применение техники краевых задач ТФКП для построения общего решения уравнений стационарного осесимметричного нейтринного электровакуума	19
Р.М.Авакян. О решении для изолированной массы в гармонических координатах	22
М.П.Коркина, О.Ю.Орлянский. Точные решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для жидких сфер	25
В.Г.Кречет. Гравитирующая материя во вращающихся космологических моделях	28
Н.В.Мишкевич. О физическом истолковании решений уравнений ОТО с помощью явления увлечения	30
В.А.Унт. Дополнительные постулаты ОТО и точные решения	33
А.А.Коппель. Методологические основы нерелятивистского анализа решений уравнений гравитационного поля	36
А.А.Коппель, К.П.Пало. Нерелятивистский предел класса нестационарных вакуумных точных решений эйнштейновых уравнений для pp -волн	39
А.А.Коппель, А.А.Ихерманн. Применения нового метода анализа мультипольной структуры: нахождение и анализ новых точных стационарных аксиально-симметричных решений уравнений гравитационного поля	42
А.А.Коппель, Т.Р.Лембер. Обобщенные координаты Бойера-Линдквиста-Шварцшильда и зависимость стационарной аксиально-симметричной вакуумной метрики от мультипольных моментов Хансена	45
В.Р.Кайгородов. Свойства гравитационных волн в пустом пространстве-времени и их погружение в E_6	48
А.И.Нестеров. Асимптотические симметрии и законы сохранения на изотропной бесконечности будущего	50
В.С.Митковский, А.В.Шаповалов. О привилегированных системах координат конформно-плоских пространств Эйнштейна	53
А.Н.Алиев, Д.В.Гальцов. Решения Керра-Ньюмена-Эрнста и их физическая интерпретация	55
Н.Н.Костюкович. Квазиконические геодезическое в классе метрик Томиматсу-Сато: точные решения	58

Р.С.Сингатуллин. О точных решениях уравнений поля гравитации, построенных по заданному движению фотонов	61
Е.Ю.Мелкумова, В.И.Хлебников. Геодезическая девиация и мультипольная структура источника гравитационного поля	64
Р.Р.Таммело. О совпадении уравнений девиации геодезических Циофолини и Ходжкинсона	67
Э.А.Весман, Р.Р.Таммело. О изгибных колебаниях стрелы в поле гравитационной волны	70
В.И.Башков. Решение конечных треугольников в римановой геометрии	73
Ю.П.Выслый. Поле точечного электрического заряда в релятивистской теории гравитации	74
А.А.Власов. Гравитационный коллапс в релятивистской теории гравитации	76
П.В.Карасут, Ю.В.Чугреев. Керр-Ньюменовское решение в РТГ	79
В.Г.Багров, В.В.Обухов, К.Е.Осетрин. Штеккелеры пространства вакуума в теории Бранса-Дикке	82
Н.В.Мицкевич, Санджай Шарма. Точное решение для переменного во времени квадруполь в линеаризованной теории гравитации	85
Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян. Два аксисимметричных решения уравнений ОТО	86
Э.В.Чуарян, О.А.Григорян, Б.В.Хачатрян. Аналитические решения симметрической теории	89
В.Г.Багров, А.В.Шаповалов, А.А.Евсеевич. Пространства Штеккеля типа $(2, n)$, допускающие вектор Яно	92
В.Г.Багров, В.В.Обухов. Диагонализация квадрированного уравнения Дирака-Фока	95
В.Вильяльба, Г.В.Шишкин. Точное решение уравнения Дирака в параболических цилиндрических координатах для свободной частицы	98
Г.В.Шишкин, А.И.Тимошенко. Разделение переменных в матрично-дифференциальном операторе первого порядка	100
А.К.Горбачевич. Об операторе обобщенного импульса в искривленном пространстве-времени	103
Р.И.Манкин. Фундаментальное решение обобщенного уравнения Клейна-Гордона	106
Д.В.Гальцов, Э.Масар. О цилиндрически симметричных решениях уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса-Хиггса и Эйнштейна-Хиггса	109
В.Р.Гаврилов. Многомерные геометрические теории с нетривиальной топологией	112
В.Д.Ивацук, В.Н.Мельников. Неизбежность временной вариации ньютоновской постоянной в теории суперструн	114

И.Кууск. Частицы, струны, мембраны и гравитация	117
Р.-К.Р.Лойде, П.А.Суурварик. Уравнение линеаризованной супергравитации	120
Р.-К.Р.Лойде, А.Р.Полт. Калибровочно-инвариантные уравнения для симметричного тензорного поля	123
Ю.Л.Вартанян, Г.Б.Алавердян, Г.С.Адмян. Нейтронные звезды и пионная конденсация	125

О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ,
ПАРАМЕТРИЗУЮЩИХ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЭЙНШТЕЙНА-МАКСВЕЛЛА С ИЗОМЕТРИЯМИ

Г. А. Алексеев
МИАН СССР (Москва)

В [1,2] был изложен новый метод, наиболее подходящее название которому - "метод изомонодромных деформаций", предназначенный для интегрирования электровакуумных уравнений Эйнштейна-Максвелла для гравитационных и электромагнитных полей, зависящих только от двух координат. При этом выяснилось, что все множество решений этих уравнений локально можно описать, естественным образом установив взаимно однозначное соответствие между всевозможными решениями, компоненты которых являются аналитическими функциями пространственно-временных координат (ξ, η) в некоторой окрестности \mathcal{U} выбранной начальной точки (ξ_0, η_0) , и произвольно выбираемыми парами голоморфных функций $u(w), v(w)$ комплексного параметра w , не зависящими от координат ξ, η (но зависящими, однако, от выбора начальной точки ξ_0, η_0) и определенными в некоторой области Ω на плоскости w . Область Ω должна состоять из двух непересекающихся односвязных областей Ω_+ и Ω_- (имеющих, возможно, общую границу): $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, причем области Ω_+ и Ω_- должны содержать пары точек $w=\xi$, $w=\xi_0$ и $w=\eta$, $w=\eta_0$ соответственно, а так же соединяющие их разрезы L_+ и L_- . Таким образом, фактически мы имеем не две, а в общей сложности четыре произвольных голоморфных функции $u_{\pm}(w)$ и $v_{\pm}(w)$, определенных в соответствующих областях Ω_{\pm} . В случае полей в вакууме $v \equiv 0$ и остается только две произвольных голоморфных функции $u_{\pm}(w)$.

Если произвольно задать голоморфные функции $u(w)$ и $v(w)$, то согласно [1], для определения соответствующего решения уравнений поля необходимо решить вполне классическую задачу - линейное скалярное (т.е. не матричное) сингулярное интегральное уравнение на упомянутом выше составном разрезе $L = L_+ \cup L_-$. Ядро этого интегрального уравнения является эрмитовой формой вто-

рого порядка от u и v . По его решениям компоненты гравитационного и электромагнитного полей определяются в квадратурах.

Из всей этой конструкции совершенно очевидно, что многие геометрические и физические свойства конкретных решений уравнений поля должны быть тесно связанными со свойствами отвечающих им функций $u(w)$ и $v(w)$. В настоящей заметке мы опишем эту связь более детально. Прежде всего, напомним, как возникли функции $u(w)$ и $v(w)$. В основе предложенного подхода лежит рассмотрение структуры на плоскости комплексного параметра w решений $Y(\xi, \eta, w)$ следующей переопределенной линейной системы комплексных 3×3 -матричных уравнений:

$$2i(w-\xi)\partial_{\xi}Y = U \cdot Y \quad 2i(w-\eta)\partial_{\eta}Y = V \cdot Y \quad (1)$$

где координаты ξ, η - вещественные (запаздывающее и опережающее время) - для волновых полей или комплексно сопряженные для стационарных полей с осевой симметрией; матричные коэффициенты $U(\xi, \eta)$ и $V(\xi, \eta)$ системы (1) имеют явные выражения через метрику и электромагнитный потенциал и их первые производные. Условия совместности системы (1) с учетом структуры ее коэффициентов в точности совпадают с уравнениями поля.

Структура системы (1) такова, что элементы матрицы ее фундаментального решения Y , нормированного при всех w на единичную матрицу в начальной точке (ξ_0, η_0) (в которой метрика выбрана совпадающей с метрикой Минковского, а электромагнитный потенциал обращается в нуль) голоморфны во всей плоскости w , исключая составной разрез L , имеют скачок на L и ветвления на его концах. Характер ветвления определяется функцией $\lambda = [(w-\xi)(w-\eta)]^{1/2} / [(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)]^{1/2}$, а ветвящиеся элементы Y (с отброшенной голоморфной на L частью) имеют структуру:

$$\lambda^{-1} \varphi(\xi, \eta, w) \otimes k(w), \quad \text{где } k(w) = \{1, u(w), v(w)\} \quad (2)$$

Так возникают функции $u(w)$ и $v(w)$, определяющие собой вместе с характером ветвления (т.е. видом функции λ) полный набор "данных монодромии" решений системы (1), т.е. данных, определяющих ветвление решений (1) на плоскости w .

1. Вычисление $u(w)$ и $v(w)$ по данным на границе. Если на неко-

торой граничной кривой в пространстве ξ, η заданы компоненты полей и их первые производные по нормали к ней, то составляя подходящую линейную комбинацию уравнений (1), получим систему обыкновенных уравнений для Y , содержащую производные не по ξ и η отдельно, а вдоль граничной кривой, по ее параметру. Коэффициенты этой системы определяются данными на границе. Ее решение $Y(s, w)$ (где s - параметр вдоль границы) имеет тот же характер ветвления (2) на плоскости w , поэтому решая эту систему и выделяя ветвящуюся на L часть ее фундаментального решения, нормированного в некоторой начальной точке (лежащей на граничной кривой), получаем функции $u(w)$ и $v(w)$.

2. Вычисление $u(w)$ и $v(w)$ для заданного известного решения.

Если для некоторого решения известны компоненты полей, то по известным формулам [1,2] можно вычислить коэффициенты U и V системы (1). Решив эту линейную систему и выделив ветвящуюся часть ее нормированного фундаментального решения, обязательно имеющего вид (2), легко вычисляем функции $u(w)$ и $v(w)$.

3. Функции $u(w)$ и $v(w)$ и потенциалы Эрнста для решений с регулярной осью симметрии.

Если для стационарных полей с осевой симметрией или цилиндрических волн рассматриваемая область пространства-времени содержит отрезок оси симметрии, на котором гравитационное и электромагнитное поля не имеют каких-либо сингулярностей, то начальную точку нормировки решения можно расположить на самой оси. При этом две из четырех точек ветвления совпадут друг с другом, а области голоморфности функций u_+ и u_- (и аналогично v_+ и v_-) будут иметь общие точки, так что u_+ и u_- (так же как и v_+ и v_-) будут являться аналитическими продолжениями друг друга. В этом случае можно явно выразить функции $u(w)$ и $v(w)$ через граничные значения потенциалов Эрнста E и Φ на оси симметрии:

$$u(w) = - \frac{E(w) - E(\beta_0) + 2\bar{\Phi}(\beta_0)[\Phi(w) - \Phi(\beta_0)]}{2i(w - \beta_0)e^{2\psi_0}}, \quad v(w) = \frac{\Phi(w) - \Phi(\beta_0)}{2i(w - \beta_0)e^{\psi_0}}$$

где $e^{2\psi_0} = -\epsilon[\Re E(\beta_0) + \Phi(\beta_0)\bar{\Phi}(\beta_0)]$; на оси симметрии $\rho=0$, что

отвечает $\xi = \eta$, а дополнительная координата β есть либо z (при $\epsilon = -1$, т.е. для стационарных полей), либо t ($\epsilon = +1$ — для цилиндрических волн); β_0 есть значение β в точке нормировки, лежащей на оси ($\rho_0 = 0$); $E(\omega) = E(\rho=0, \beta=\omega)$ и $\Phi(\omega) = \Phi(\rho=0, \beta=\omega)$.

4. Связь $u(\omega)$ и $v(\omega)$ с мультипольной структурой для асимптотически плоских полей. Для асимптотически плоских полей формулы для $u(\omega)$ и $v(\omega)$ значительно упрощаются, если точку нормировки $z_0 \equiv \beta_0$ устремить к бесконечности. Тогда

$$u(\omega) = \frac{E(\omega) - 1}{2i} \quad \text{и} \quad v(\omega) = -\frac{1}{2i} \Phi(\omega) \quad (3)$$

где потенциалы E, Φ выбраны так, что при $z_0 \rightarrow -\infty$ $E \rightarrow 1$, $\Phi \rightarrow 0$. Отсюда видно, что мультипольные моменты в разложении потенциалов Эрнста на пространственной бесконечности непосредственно связаны с разложением функций $u(\omega)$ и $v(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

5. Функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ для статических полей. Из приведенных выше формул видно и еще одно полезное свойство функций $u(\omega)$ и $v(\omega)$: для статических полей, когда метрика является диагональной, а потенциалы Эрнста вещественными, эти функции удовлетворяют соотношениям: $\overline{u(\omega)} = -u(\bar{\omega})$, $\overline{v(\omega)} = -v(\bar{\omega})$.

6. О вычислении решений в элементарных функциях. В заключение напомним, что если функции u_+ и u_- , так же как v_+ и v_- являются аналитическими продолжениями друг друга, а получающиеся при этом две функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ являются рациональными, то компоненты гравитационного и электромагнитного полей вычисляются в элементарных функциях [2].

Перечисленные свойства функций $u(\omega)$ и $v(\omega)$ могут оказаться весьма полезными при рассмотрении различных задач теории гравитации для электровакуумных полей, зависящих от двух координат: при конструировании новых решений, при постановке краевых задач, при идентификации и классификации решений и, возможно, ряде других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. А. // ДАН СССР, 1985. Т. 283. N° 3. С. 577.
2. Алексеев Г. А. // Труды МИАН СССР, 1987. Т. 176. С. 211.

О СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЙ РОБИНСОНА - ТРАУТМАНА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ.

А. Т. Ильичев
МИАН СССР (Москва)

Нелинейные эволюционные уравнения, обладающие бесконечномерной алгеброй Ли внутренних симметрий, можно подразделять на две категории по свойствам их алгебр. К первой относятся уравнения, алгебра симметрий которых имеет конечномерные представления в алгебре эндоморфизмов соответствующего векторного пространства, т.е. гомоморфна некоторой конечномерной алгебре Ли. В этот класс входят уравнения, интегрируемые методом обратной задачи теории рассеяния (вполне интегрируемые системы), уравнения, обладающие преобразованиями Бэклунда в себя. Конечномерные алгебры, получающиеся в результате процедуры замыкания бесконечномерных в методе продолженных структур [1], несут информацию о бесконечномерных симметриях, достаточную для построения целых семейств решений (например солитонных). Ко второй категории относятся уравнения, для бесконечномерной алгебры симметрий которых не удастся найти нетривиального конечномерного представления. Такого рода уравнения не поддаются исследованию существующими методами интегрирования нелинейных систем (групповой метод [2], метод обратной задачи теории рассеяния и т. п.). Кроме упомянутых видов эволюционных уравнений имеют место уравнения, обладающие естественной конечномерной алгеброй Ли внутренних симметрий, которая может быть получена как частный случай бесконечномерной алгебры другого эволюционного уравнения. Таковым является уравнение Робинсона - Траутмана

$$z \bar{z}_t - [(z)_x^2 - z_{xx} \bar{z}_{xx}]_{xx} = 0 \quad (1)$$

которое описывает осесимметричные поля, обладающие однопараметрическим семейством бессдвиговых изотропных тензоровых напряжений с расширением (см. [3]). Метрическая форма имеет в этом случае вид :

$$ds^2 = (6K - 24r^{-1} + rz^{-1}z_t) dt^2 + 2dt^2 dr^2 - 1/12r^2 z (dx^2 + d\phi^2)$$

Здесь r - аффинный параметр вдоль конгруэнции изотропных геодезических, выстилающих гиперповерхности $t = \text{const}$, $K(z) = -z^{-1}(\ln z)_{xx}$ x и ϕ - локальные координаты на 2 - поверхностях, образованных пересечением уровней r и t . Величина $K(z)$ имеет смысл гауссовой кривизны поверхностей с метрикой $0,5 z(dx^2 + d\phi^2)$. Численные исследования уравнения (1) [4] обнаружили свойства, аналогичные свойствам решений линейных параболических систем, например выглаживание решений (1) с течением времени (стремление геометрии упомянутых 2 - поверхностей к сферической с течением времени).

Конечномерная нильпотентная алгебра симметрий уравнений (1) была получена в [5] методом продолженных структур Эстабрука - Уолквиста [1]. Ненулевые коммутаторы ее генераторов имеют вид:

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = -X_4, [X_1, X_4] = -X_5, [X_2, X_5] = -[X_1, X_6] = \\ = [X_2, X_5] = [X_3, X_4] = X_7 \quad (2)$$

Из тождеств Якоби, примененных к (2) следует, что вектор X_7 , коммутирует с остальными шестью, т.е. является центром алгебры. Этот вектор несуществен при рассмотрении свойств алгебры (2) и потому его можно положить равным нулю. Конечномерные алгебры, гомоморфные бесконечномерным существенным образом отличаются от естественно конечномерных алгебр по той информации о симметриях уравнений, которая в них содержится. Так исследование естественно конечномерных алгебр не дает ничего, кроме построения соответствующих (как правило нелокальных) законов сохранения. Такие законы сохранения для уравнения (1) были получены в [5] из линейного представления алгебры (2).

Рассмотрим далее уравнение

$$z_t + z_{xxxx} = 0 \quad (3)$$

полученное из (1) линеаризацией на фоне постоянного решения. Отметим, что уравнение (3) возникает также в механике

жидкости при описании распространения длинных линейных волн под вязкой пленкой, которая может моделировать, например битый лед. При исследовании групповых свойств уравнений методом продолженных структур [1] рассматриваются 1 - формы:

$$\omega^k = dy^k + F^k dx + G^k dt$$

где y^k - псевдопотенциалы, существование которых обуславливает нетривиальную групповую структуру уравнений, F^k и G^k зависят от полевых функций, их последовательных производных (до 3 порядка для (3)) и псевдопотенциалов. В случае (3) они подчиняются уравнениям:

$$F_z^k + G_q^k = 0, F_u^k = F_p^k = F_q^k = 0, uG_z^k + pG_u^k + qG_p^k + G^i F_{y_i}^k - F^i G_{y_i}^k = 0 \quad (4)$$

где $u=z_x, p=z_{xx}, q=z_{xxx}$. Решения (4) можно записать в виде:

$$F^k = X_1^k + zX_2^k, G^k = -qX_2^k - pX_3^k + uX_4^k - zX_5^k + X_6^k$$

где $X_i^k(y)$ - константы интегрирования (4) и компоненты образующих алгебры:

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = -X_4, [X_1, X_4] = -X_5, [X_1, X_5] - [X_2, X_6] = 0$$

$$[X_1, X_6] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = [X_2, X_5] = 0 \quad (5)$$

Алгебра (5) бесконечномерна. В частном случае $[X_1, X_5] = 0$, (5) в точности совпадает с алгеброй (2) уравнения (1). Таким образом интересующая нас алгебра симметрий является частным случаем бесконечномерной алгебры симметрий линейного эволюционного уравнения. Этот факт позволяет надеяться на получение нетривиальной информации о способе построения решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook // J. Math. Phys. 1975. v. 16. P. 1
2. А. Н. Лезнов, М. В. Савельев // Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М. Наука. 1985
3. I. Robinson, A. Trautman // Proc. R. Soc. 1962. Ser. 265. P. 463
4. Z. Perjes // KFKI - 1986 - 98/B PREPRINT
5. E. N. Glass, D. C. Robinson // J. Math. Phys. 1984. v. 25. P. 3382

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ ВОКРУГ БЕСКОНЕЧНОЙ НИТИ

С.Л.Парновский

Украинский центр стандартизации и метрологии (Киев)

Поведение ряда физических полей с источником в виде бесконечно длинной массивной нити было исследовано в работе [1], где были найдены соответствующие точные решения уравнений гравитации. В ней было показано, что напряженность электростатического поля заряженной нити при удалении от нее вначале падает, а затем из-за самогравитации возрастает до бесконечности, образуя истинную особенность пространства-времени на конечном расстоянии от оси. Этот эффект связан со спином фотонов и полностью отсутствует для скалярного поля [1]. Насколько он определяется еще и безмассовостью фотонов? Ответ на этот вопрос заранее не очевиден. С одной стороны эффекту самогравитации поля способствуют дополнительные члены в тензоре энергии-импульса массивного векторного поля, связанные с его массой

$$T_{ik} = -\varphi_{i\epsilon} \varphi_k^* - \varphi_{i\epsilon}^* \varphi_k^e + m^2(\varphi_\epsilon^* \varphi_k + \varphi_k^* \varphi_\epsilon) + g_{ik} \left(\frac{1}{2} \varphi_{\epsilon m}^* \varphi^{\epsilon m} - m^2 \varphi_\epsilon^* \varphi^\epsilon \right) \quad (1)$$

С другой стороны на больших расстояниях от источника это поле экспоненциально затухает, понижая плотность энергии.

Рассмотрим бесконечную нить - источник векторного поля, компоненты которого $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ могут зависеть только от радиальной координаты ρ , как и компоненты метрики

$$ds^2 = a^2(\rho) dt^2 - d\rho^2 - b^2(\rho) d\varphi^2 - c^2(\rho) dz^2, \quad (2)$$

$$x^i = (t, \rho, \varphi, z)$$

Уравнения поля требуют выполнения условия $\varphi_i = 0$ при $m \neq 0$. Кроме того недиагональные компоненты уравнений Эйнштейна для (2) дают нам $R_{ik} = 0$, откуда $T_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Для случая электромагнитного поля это условие приводит к тому, что из трех возможных компонент поля $E_\varphi, H_\varphi, H_z$ отличной от нуля может быть только одна. Для действительного векторного поля то же самое относится к компонентам его вектора φ_0, φ_2 и φ_3 . Для комплексного поля ненулевыми могут быть две из этих величин, но их фазы должны тогда отличаться на $\pi/2$.

Рассмотрим теперь диагональные уравнения Эйнштейна. Обозначив штрихом производные по ρ , запишем их правые части

$$\begin{aligned} T_0^0 - \frac{1}{2}T &= |\varphi_0'|^2 a^{-2} + |\varphi_2'|^2 b^{-2} + |\varphi_3'|^2 c^{-2} + 2m^2 |\varphi_0|^2 a^{-2} \\ T_2^2 - \frac{1}{2}T &= -|\varphi_0'|^2 a^{-2} - |\varphi_2'|^2 b^{-2} + |\varphi_3'|^2 c^{-2} - 2m^2 |\varphi_2|^2 b^{-2} \\ T_3^3 - \frac{1}{2}T &= -|\varphi_0'|^2 a^{-2} + |\varphi_2'|^2 b^{-2} - |\varphi_3'|^2 c^{-2} - 2m^2 |\varphi_3|^2 c^{-2} \quad (3) \\ T_1^1 - \frac{1}{2}T &= |\varphi_0'|^2 a^{-2} - |\varphi_2'|^2 b^{-2} - |\varphi_3'|^2 c^{-2} \end{aligned}$$

Мы пока не определили ненулевых компонент вектора поля. При $\varphi_0=0$ и $m=0$ мы имеем дело с магнитным полем вокруг нити. В этом случае особенность на конечном расстоянии от нити отсутствует [1,2]. При $m \neq 0$ она не может появиться, поскольку все эффекты, связанные с массой поля – дополнительные члены в (3) и экспоненциальное затухание поля – действуют в другую сторону. Случай $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ и $m=0$ соответствует радиальному электростатическому полю. При этом пространство-время всегда имеет особенность при $\rho = \rho_c$, а координата ρ изменяется от 0 до ρ_c [1]. Значение ρ_c не связано с плотностью заряда и массы нити и может быть любым, поскольку соответствующая метрика не имеет характерного масштаба по ρ . Величину с размерностью длины, попросту нельзя составить из безразмерных линейных плотностей массы и заряда (мы полагаем скорость света и эйнштейновскую гравитационную постоянную равными единице). Рассмотрим интересующий нас случай $\varphi_0 \neq 0$, $m \neq 0$. Соответствующую ему систему уравнений поля

$$\begin{aligned} m^2 \varphi &= \varphi'' + (\beta' + \gamma' - \alpha') \varphi', \quad \alpha = \ln a, \quad \beta = \ln b, \quad \gamma = \ln c, \\ \alpha'' + \alpha'(\alpha' + \beta' + \gamma') &= |\varphi_0'|^2 a^{-2} + 2m^2 |\varphi_0|^2 a^{-2}, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= -\beta'' - \beta'(\alpha' + \beta' + \gamma') = \\ &= -\gamma'' - \gamma'(\alpha' + \beta' + \gamma') = |\varphi_0'|^2 a^{-2} \end{aligned} \quad (4)$$

решить не удастся. Однако из нее видно, что при малых массах $m \rho_c \ll 1$, соответствующими членами в (4) можно пренебречь и особенность при $\rho = \rho_c$ не уничтожается. Поскольку же ρ_c может быть сколь угодно малым, это условие может выполняться при любом m . Таким образом особенность при конечном ρ есть и в случае массивного векторного поля.

То, что характер пространства-времени с источником гра-

витационного и массивного векторного полей в виде бесконечной нити не может зависеть от массы квантов последнего, видно и из того, что из величин, характеризующих источник, нельзя составить величину с размерностью массы, которая могла бы играть роль критической массы при "фазовом переходе" по величине m . Отсутствие масштаба по m видно и из того, что после преобразования координат $\rho \rightarrow m^{-1}\rho$ уравнения (4) переходят в ту же систему уравнений, но с $m=1$. А так как случай малого m не может качественно отличаться от случая $m=0$ при любом значении ρ_c , то особенность на конечном расстоянии от источника должна существовать при любом m .

Для источников конечной длины, когда поле имеет характерный размер - длину отрезка нити - эти рассуждения становятся неправомерными. По-видимому в этом случае должно появиться критическое значение массы m , при котором характер решения качественно меняется. Но эта задача существенно сложнее рассмотренного здесь случая источника бесконечной длины, для которого решение (4) не получено. По-видимому критическое значение и соответствующие точные решения не могут быть построены.

Литература:

1. С.Л.Парновский, ЖЭТФ, 76, 1162, 1979 г.
2. S.L.Safko, L.Witten, J.Math.Phys. 12, 257, 1971

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТРИКИ ВАН ШТОКУМА

С.Л.Парновский

Украинский центр стандартизации и метрологии (Киев)

Хорошо известное в общей теории относительности решение ван Штокума [1] традиционно трактуется как пространство-время, содержащее вращающийся бесконечно длинный пылевой цилиндр. Ниже мы укажем на обстоятельства, противоречащие такой интерпретации и предложим другую трактовку физического смысла метрики ван Штокума. Это решение имеет вид

$$ds^2 = F(z)dt^2 - 2M(z)dt d\varphi - L(z)d\varphi^2 - H(z)(dz^2 + d\bar{z}^2) \quad (1)$$

Входящие в него функции зависят от параметров R и a , рассматриваемых как радиус и угловая скорость цилиндра. Внутри него при $z < R$ расположена пыль с плотностью ρ и 4-скоростью U^i . В этой области решение имеет вид

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 z^2}, \quad L = z^2(1 - a^2 z^2), \quad M = a z^2, \quad F = 1, \\ 2\pi\rho &= a^2 e^{a^2 z^2}, \quad U^i = \delta_c^i, \quad x^i = (t, z, \varphi, z) \end{aligned} \quad (2)$$

При $z > R$ имеются три внешних вакуумных решения, сшивающихся при $z = R$ с внутренним решением (2).

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 R^2} (R/z)^{2a^2 R^2}, \quad L = \frac{1}{2} z R \operatorname{sh}(3\varepsilon + \theta) \operatorname{sh}^{-1} 2\varepsilon \operatorname{ch}^{-1} \varepsilon, \\ M &= z \operatorname{sh}(\varepsilon + \theta) \operatorname{sh}^{-1} 2\varepsilon, \quad F = z R^{-1} \operatorname{sh}(\varepsilon - \theta) \operatorname{sh}^{-1} \varepsilon, \\ \theta &= \sqrt{1 - 4a^2 R^2} \ln(z/R), \quad \operatorname{th} \varepsilon = \sqrt{1 - 4a^2 R^2}. \quad (aR < \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H &= e^{-1/4} (R/z)^{1/2}, \quad L = \frac{1}{4} z R [3 + \ln(z/R)], \\ H &= \frac{1}{2} z [1 + \ln(z/R)], \quad F = z R^{-1} [1 - \ln(z/R)]. \quad (aR = \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 R^2} (R/z)^{2a^2 R^2}, \quad L = \frac{1}{2} z R \sin(3\varepsilon + \theta) \operatorname{cosec} 2\varepsilon \sec \varepsilon, \\ H &= z \sin(\varepsilon + \theta) \operatorname{cosec} 2\varepsilon, \quad F = z R^{-1} \sin(\varepsilon - \theta) \operatorname{cosec} \varepsilon, \\ \theta &= \sqrt{4a^2 R^2 - 1} \ln(z/R), \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{4a^2 R^2 - 1}. \quad (aR > \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (5)$$

Выбор внешнего решения зависит от значения aR . Поскольку все они зависят от одной пространственной координаты z , то с помощью преобразования координат они должны переводиться в известные решения, зависящие от одной пространственной координаты x , описанные в [2]. Это пространственная метрика Казнера (6), а также пространственные метрики Казнера с равными (7) или комплексными (8) показателями, имеющие вид

$$ds^2 = x^{2p_1} dt^2 - dx^2 - x^{2p_2} dy^2 - x^{2p_3} dz^2, \quad (6)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

$$ds^2 = -2x^{2p_1} du dv - dx^2 \pm x^{2p_1} \ln(x/\lambda) dv^2 - x^{2p_3} dz^2, \quad (7)$$

где (p_1, p_3) равны $(0, 1)$ или $(2/3, -1/3)$ и $\lambda = \text{const}$

$$ds^2 = x^{2p'_1} [(du^2 - dv^2) \cos \Psi - 2 du dv \sin \Psi] - dx^2 - x^{2p'_3} dz^2, \quad (8)$$

$$\Psi = 2p'' \ln(x/\lambda), \quad 2p'_1 + p'_3 = 2p''^2 + p'_3^2 = 1, \quad \lambda = \text{const}$$

Существуют еще три точные вакуумные решения, зависящие только от одной пространственной переменной, но они в отличие от (3-5) регулярны во всем пространстве. Решений такого типа с особенностью $x=0$, кроме (6-8), не существует [2]. Нетрудно убедиться, что решения (3-5) переходят в (6-8) после замены

$$t^* = \alpha E + \beta \varphi, \quad \varphi^* = \gamma t + \delta \varphi; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const} \quad (9)$$

При этом (3) переходит в (6), (4) в (7) при $p_1=2/3$, а (5) в (8). Мы не будем приводить здесь выражения для α, β, γ и δ для каждого преобразования из-за их громоздкости, однако их при желании нетрудно получить. Таким образом внешние решения ван Штокума эквивалентны метрикам (6-8), физический смысл которых был исследован ранее. Так (6) описывает пространство-время вокруг неподвижной массивной бесконечно длинной нити или цилиндра [3], а в (7) с $p_1=2/3$ эта нить имеет определенную линейную плотность массы и окружена гравитационной

волной нулевой частоты [4]. Таким образом решения (3,4) описывают неподвижную нить или цилиндр во вращающейся системе координат (9). Аналогично тому как метрика Шварцшильда после преобразования (9) не превращается в решение Керра, (3) и (4) не могут описывать вращающийся цилиндр. Решение же (8) действительно соответствует вращающейся особенности [4]. Так, в нем есть вращение геодезических, а в (3,4) - нет. Однако при переходе в форму (5) при $\alpha R > 1$ особенность $x=0$ преобразуется в $z = \infty$, что полностью противоречит стандартной интерпретации (5) в этом случае и делает сшивку с (2) чисто формальной. О трудностях обычной интерпретации метрики ван Штокума при $\alpha R > 1$ было отмечено в статье Боннора [5].

Итак, из трех внешних решений ван Штокума (3-5) пространство-время вокруг вращающегося цилиндра описывает только (5) при $1/2 < \alpha R < 1$. При этом параметр α , характеризующий угловую скорость вращения должен лежать в определенном интервале. Его верхняя граница связана с некорректной сшивкой с (2). Эта трудность вполне преодолима. Наличие же нижней границы более интересно. Оно приводит к мысли о том, что при малых угловых скоростях вращения все пространство-время увлекается вращающимся цилиндром, имеющим бесконечную массу. При такой интерпретации мы имели бы дело с конкретным воплощением принципа Маха.

Остальные решения (3,4) описывают неподвижный источник во вращающейся системе координат. Поскольку при преобразовании (9) циклическая координата φ входит в новую временную координату, последняя также может рассматриваться как циклическая. Это обстоятельство, являющееся следствием неудачного выбора координат в (3), позволило тем не менее Типлеру рассматривать (3) как машину времени, что заведомо неверно [6].

Литература:

1. Van Stockum W.G., Proc.R.Soc.Edin. 57, 135, 1937.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., "Теория поля", М., "Наука", 1974.
3. Khalatnikov I.M., Parnovsky S.L., Phys.Lett., 66A, 466, 1978.
4. Парновский С.Л., ЖЭТФ, 76, 385, 1979.
5. Bonnor W.B., J.Phys.A, 13, 2121, 1980.
6. Tipler F.J., Phys.Rev.D, 9, 2203, 1974.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНИКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТФКП ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕЙТРИННОГО ЭЛЕКТРОВАКУУМА

М.Н.Зарипов

Московский Государственный университет (Москва)

Как показано в работе [1], чтобы найти потенциалы Эрнста $\mathcal{E}(z, \varphi)$ и $\Phi(z, \varphi)$, определяющие метрику и электромагнитное поле в случае стационарного осесимметричного нейтринного электривакуума, нужно решить некоторую краевую задачу на плоскости комплексного переменного σ , т. е. взять на $\mathcal{C}(\sigma)$ замкнутый жорданов контур γ , делящий $\bar{\mathcal{C}}$ на 2 области γ^+ и γ^- , причем точки $\sigma' = \pm 1$ принадлежат γ^+ , а $\sigma' = \infty$ области γ^- .



и найти функции $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3$ голоморфные в γ^- и функции $\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7$ голоморфные в γ^+ , для которых бы на γ выполнялись следующие краевые условия:

$$\tilde{R}_1 = B \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5, \quad \tilde{R}_2 = B e \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_6, \quad \tilde{R}_3 = B f \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5$$

$$e^* \mathcal{E}_5 + \mathcal{E}_6 + 2f^* \mathcal{E}_7 = 0$$

где $e \equiv e(\xi)$, $f \equiv f(\xi)$, $e^* \equiv (e(\xi^*))^*$, $f^* \equiv (f(\xi^*))^*$

$$\xi = z + i\varphi$$

$$B(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \exp \int_{-1}^{+1} \frac{-\beta(z + i\varphi z) dz}{z - \sigma}$$

$$\beta(\xi) \equiv - \frac{\partial w(i\xi)}{\partial \xi}, \quad \beta(\xi) = (\beta(\xi^*))^*$$

w - гармонический потенциал нейтринного поля [2], e и

f условия на оси симметрии поля $e(z) \equiv \mathcal{E}(z, 0)$, $f(z) \equiv \Phi(z, 0)$
 \mathcal{L} некоторый контур, соединяющий точки $\epsilon' = -1$ и $\epsilon' = +1$.
 Если потребовать нормировку $\epsilon \tilde{R}_1|_{\epsilon=\infty} = 1$ то \mathcal{E} и Φ
 можно найти по формулам

$$\mathcal{E}(z, g) = \epsilon \tilde{R}_2|_{\epsilon=\infty} \quad \Phi(z, g) = \epsilon \tilde{R}_3|_{\epsilon=\infty}$$

В статье [1] было получено интегральное уравнение, однако построение общего решения такого уравнения затруднительно, поскольку аналог подхода, использованного в работе [2] применим, только если $B(\epsilon)$ алгебраическая функция. При этом необходимо униформизировать $B(\epsilon)$, например, автоморфными функциями [3] и применить разложения в ряды по автоморфным функциям.

В данной работе предполагается, что B , e , f произвольны и предлагается подход, позволяющий получить формулы для \mathcal{E} и Φ .

Для этого вначале получим краевую задачу с регулярным условием на контуре. Переходом от ϵ к θ

$$\epsilon = (\theta + 1/\theta)/2, \quad \sqrt{\epsilon^2 - 1} = (\theta - 1/\theta)/2$$

отображающим $\mathcal{C}(\theta) \setminus \mathcal{L}$ на \mathcal{L}^- / образ контура \mathcal{L} делит $\bar{\mathcal{C}}(\theta)$ на 2 области: $\mathcal{L}^+ \ni 0$ и $\mathcal{L}^- \ni \infty$ / и заменой

$$\Sigma_y = F_y^+ + F_y^-, \quad e \Sigma_y = F_8^+ + F_8^-, \quad f \Sigma_y = F_9^+ + F_9^-$$

$$\Sigma_a(\theta - 1/\theta)/2 = F_a^+ - F_a^-, \quad a = 5, 6, 7$$

$$F^+(\theta) = F^-(1/\theta), \quad A = \sqrt{\epsilon^2 - 1} B$$

$$R_1^- = \tilde{R}_1 \sqrt{\epsilon^2 - 1} - A F_y^- - F_5^-$$

$$R_2^- = \tilde{R}_2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} - A F_8^- - F_6^-$$

$$R_3^- = \tilde{R}_3 \sqrt{\epsilon^2 - 1} - A F_9^- - F_7^-$$

перейдем к задаче на плоскости $\mathcal{C}(\theta)$ на функции F^+ , голоморфные в \mathcal{L}^+ и F^-, R^- голоморфные в \mathcal{L}^- .

Полученная задача допускает деформации контура \mathcal{L} в \mathcal{L}^- , которые не выводят его из окрестности, в которой голоморфны e, e^*, f, f^* и $e + e^* + 2ff^* \neq 0$. На деформированном контуре \mathcal{L} краевая задача будет регулярна. Поэтому F^+ можно разложить по положительным степеням функции, конформно отображающей \mathcal{L}^+ на внутренность единичной окружности, а A, F^-, R^- — по отрицательным степеням функции, конформно отображающей \mathcal{L}^- на внешность единичной окружности и эти разложения будут сходиться в окрестности \mathcal{L} абсолютно и равномерно; подставив эти разложения в задачу, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений на \mathcal{C}^+ , \mathcal{D} и коэффициенты разложений, откуда по формулам Крамера будем иметь \mathcal{C}^+ и \mathcal{D} в виде отношений бесконечных определителей, из которых можно найти потенциалы Эрмита с любой степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусин Ю.Р. Точные решения уравнений нейтринного электровакуума. Сб. трудов МАИ "Проблемы относительности и гравитации в земных и космических условиях", М., МАИ, 1988.
2. Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М., 1984.
3. Гурвиц А., Курант Р., Теория функций. М. 1968.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1963.

О РЕШЕНИИ ДЛЯ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАССЫ
В ГАРМОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Р.М.Аракян

Ереванский государственный университет (Ереван)

Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое статическим сферически-симметрическим распределением материи. Запишем четырехмерный интервал в форме ($c = \kappa = 1$):

$$ds^2 = e^{\gamma(z)} dt^2 - e^{\lambda(z)} dz^2 - z^2 e^{\mu(z)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (I)$$

Тогда уравнения Эйнштейна примут вид:

$$\mu'' + \frac{3\mu'^2}{4} + \frac{3\mu'}{z} - \frac{\lambda'}{z} - \frac{\mu'\lambda'}{2} - \frac{e^{\lambda-\mu}-1}{z^2} = -8\pi \rho e^{\lambda}, \quad (2)$$

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'}{z} + \frac{\gamma'}{z} + \frac{\mu'\gamma'}{2} - \frac{e^{\lambda-\mu}-1}{z^2} = 8\pi P e^{\lambda}, \quad (3)$$

$$\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'}{z} + \frac{\gamma'-\lambda'+2\mu'}{2z} + \frac{\mu'\gamma'-\mu'\lambda'-\gamma'\lambda'}{4} = 8\pi P e^{\lambda}, \quad (4)$$

где ρ и P - плотность и давление вещества, связанные уравнением состояния $P = P(\rho)$. Для функций $\gamma(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и плотности $\rho(z)$ имеем всего три уравнения. В качестве недостающего уравнения воспользуемся условием гармоничности [1]. Для метрики (I) оно имеет вид:

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 e^{\frac{\gamma-\lambda+2\mu}{2}} \right) = 2 z e^{\frac{\gamma+\lambda}{2}}. \quad (5)$$

Вначале систему (2)-(5) решим в пустоте ($\rho = P = 0$). Легко заметить, что одно из уравнений (2)-(4) является следствием двух остальных. Решив их, выразим $\gamma(z)$ и $\lambda(z)$ через $\mu(z)$:

$$e^{\gamma(z)} = \frac{R-2M}{R}, \quad (6)$$

$$e^{\lambda(z)} = \left(\frac{dR}{dz} \right)^2 \frac{R}{R-2M}, \quad (7)$$

где введена удобная переменная

$$R(z) = ze^{\frac{\mu(z)}{2}}, \quad (8)$$

имеющая смысл шварцшильдовской координаты. Подставив (6)-(8) в (5) и проинтегрировав его, получим:

$$z = c_1 \left[1 + \frac{R-M}{2M} \ln \frac{R-2M}{R} \right] + c_2 (R-M). \quad (9)$$

В (6)-(9) M , C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. При $z \rightarrow \infty$ мы должны иметь поведение $z/R \rightarrow 1$, откуда $C_2 = 1$. Из поведения g_{00} на больших расстояниях ($g_{00} \approx 1 + 2\varphi$, φ - ньютоновский потенциал) следует, что M - масса тела, которая должна определиться из внутреннего решения. Открытым остается вопрос о значении C_1 . Вывод $C_1 = 0$ [1], обосновываемый тем, что при $R \rightarrow 2M$ получается $|z| \rightarrow \infty$, нельзя считать корректным. Действительно, известно, что шварцшильдовский радиус тела R_s не может быть меньше $2M$. Поэтому при $R \rightarrow 2M$ мы с неизбежностью входим в область, занятую веществом, где внешнее решение (6)-(9) неприменимо [2].

Постоянная C_1 (как и M) должна быть найдена из сшивки внешнего решения и внутренним на границе тела $z = z_s$, определяемой условием $P(z_s) = 0$. Во внутренней области уравнения поля (2)-(4) совместно с условием гармоничности (5) были проинтегрированы для нескольких значений центральной плотности в случае уравнения состояния вещества из реального газа барионов [3]. При этом для численного интегрирования от точки $z = 0$ до границы $z = z_s$ необходимо наряду с центральным значением давления P_c (или плотности ρ_c) подобрать также те значения λ_c , $\lambda_c \equiv \mu_c$, при которых обеспечивается сшивка внутреннего решения с внешним. Результаты численных расчетов приведены в таблице. Для сравнения в таблице приводятся также значения шварцшильдовского радиуса

R_s тела. Как видно из таблицы, постоянная C_1 отлична от нуля, положительна, но её значение не так сильно зависит от центрального давления, как масса M .

Таблица параметров сверхплотных конфигураций

$\Gamma \text{ см}^{-3}$ ρ_c	$3.55 \cdot 10^{15}$	$6.81 \cdot 10^{15}$	$9.79 \cdot 10^{15}$	$1.69 \cdot 10^{15}$
$\frac{M}{M_\odot}$	0.35	0.77	1.05	1.39
$\tau_s (\text{км})$	15.65	11.70	19.48	9.39
$R_s (\text{км})$	16.16	12.86	12.06	10.49
$C_4 (\text{км})$	2.9	2.8	2.6	2.2

В заключение отметим следующее важное обстоятельство. В любое внешнее решение уравнений гравитационного поля входят постоянные интегрирования (или неизвестные функции). Часть этих постоянных определяется из поведения метрических коэффициентов на бесконечности. Остальные могут быть определены только путем сшивки внешнего решения с внутренним и на них нельзя поэтому накладывать произвольные ограничения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. I изд. ГИИЛ, М., 1955.
2. Asanov R.A. Schwarzschild metric and de Donder condition. препринт ОИЯИ, Е 2-87-612. 1987.
3. Саакян Г.С., Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, М., Наука, 1972.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЖИДКИХ СФЕР

М.П.Коркина, О.Ю.Орлянский

Днепропетровский университет (Днепропетровск)

Метод получения решений уравнений Эйнштейна для статических жидких сфер [1,2] обобщен на случай наличия электрического и скалярного полей. Получен новый класс точных решений совместной системы уравнений Эйнштейна, Максвелла, Клейна-Фока, описывающий заряженные жидкие сферы.

Искомая метрика является статической, сферически симметричной. Выберем ее в виде:

$$ds^2 = e^{\nu(z)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(z)} dz^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

Тензор энергии-импульса жидкости в нашем случае имеет четыре ненулевые компоненты

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \quad (2)$$

где ε - плотность энергии, p - давление.

Для тензора энергии-импульса электромагнитного поля ненулевыми компонентами являются

$$T_{02}^0 = T_{12}^1 = -T_{22}^2 = -T_{32}^3 = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4} \quad (3)$$

Для тензора энергии-импульса скалярного поля

$$T_\nu^\nu = \frac{1}{8\pi} (2\varphi^\nu \varphi_\nu - \delta_\nu^\nu \varphi^\alpha \varphi_\alpha)$$

ненулевые компоненты - это:

$$T_{00}^0 = -T_{10}^1 = T_{20}^2 = T_{30}^3 = \frac{1}{8\pi} \frac{G^2}{r^4} e^{-\nu} \quad (4)$$

где $Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho_{22} e^{\lambda} r^2 dr$ - электрический заряд сферы радиуса r

$G(r) = 4\pi \int_0^r \rho_{\nu\nu} e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} r^2 dr$ - величина, характеризующая скалярный заряд сферы радиуса r , ρ - плотность заряда.

Система уравнений Эйнштейна при наличии обоих полей:

$$e^{-\lambda} (1 - \lambda' r) = 1 - r^2 (\varepsilon + T_{00}^0 + T_{02}^0) \frac{8\pi\delta}{c^4} \quad (5)$$

$$e^{-\lambda}(1+\nu') = 1 - \nu^2(-p - T_{00}^o + T_{0\infty}^o) \frac{8\pi\delta}{c^4}$$

Третье уравнение получим из закона сохранения тензора энергии-импульса

$$\frac{\nu'}{2}(\varepsilon + p) - p' + \frac{Q Q'}{4\pi r^4} - \frac{G G'}{4\pi r^4} e^{-\nu} = 0 \quad (6)$$

Предположим, что тензоры энергии-импульса обоих полей пропорциональны целочисленной степени радиуса и получим следующий класс решений системы уравнений (5), (6):

$$e^{\nu} = B(1+y^2)^S, \quad e^{-\lambda} = \frac{y^2(1+y^2)^{2-S}}{[1+(1+S)y^2]^{\frac{2}{1+S}}} F(A, y, n, \ell) \quad (7)$$

Давление и плотность энергии равны:

$$\frac{8\pi\delta}{c^4} \rho_0^2 = \frac{1+(1+2S)y^2}{(1+y^2)^{S-1}[1+(1+S)y^2]^{\frac{2}{1+S}}} F(A, y, n, \ell) - y^{-2} + \sigma_1 y^{2n} - \sigma_2 y^{2\ell}, \quad (8)$$

$$\frac{8\pi\delta}{c^4} \varepsilon_0^2 = \frac{(S-3)(2S+1)y^4 - (S+6)y^2 - 3}{(1+y^2)^{S-1}[1+(1+S)y^2]^{\frac{S+3}{1+S}}} F(A, y, n, \ell) + \frac{3+(3+S)y^2}{y^2[1+(1+S)y^2]} - \sigma_1 \frac{5+(5+S)y^2}{1+(1+S)y^2} y^{2n} + \sigma_2 \frac{3+(3-S)y^2}{1+(1+S)y^2} y^{2\ell}$$

где

$$F(A, y, n, \ell) = A + \gamma(y) + \sigma_1 K(y, n) - \sigma_2 K(y, \ell)$$

$$\gamma(y) = y^{-2} [1+(1+S)y^2]^{\frac{2}{1+S}} + \sum_{k=0}^{S-3} \sum_{s=1}^k C(s+1)^{3-S+k} \sum_{m=0}^{S-3-k} (-1)^{s+k+m} C_{s-3}^m \frac{[1+(1+S)y^2]^{\frac{2}{1+S}+m}}{2+m(1+S)}$$

$$K(y, n) = \sum_{k=0}^{S-1} (1+s)^{1-n-k} C_{S-1}^k \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m C_{n+k-1}^m \frac{[1+(1+s)y^2]^{\frac{2}{n+2}+m}}{(s+1)^{m+2}}, \quad (9)$$

$$T_{02}^0 = \frac{1}{\gamma_0} \sigma_1 y^{2n}, \quad T_{0CK}^0 = \frac{1}{\gamma_0} \sigma_2 y^{2\ell},$$

$$y = \gamma \gamma_0^{-1},$$

γ_0 - постоянная размерности длины, A , B - постоянные интегрирования; σ_1 и σ_2 - постоянные определяющие величины зарядов. Чтобы решение не имело сингулярности при $\gamma = 0$ нужно выбрать $n \geq 3$, $\ell \geq 2$. Постоянная S определяет решение и принимает любые целочисленные значения. При $S = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ - решение (7)-(9) - это 4-ое решение Толмена [3], при $S = 2$ - решение, полученное Куховичем [4] и Адлером [5] при $S = 3$ - решение, полученное одним из авторов [6], при $S = 3$, $n = 3$ - решение, полученное в [2].

Для всех решений в центре конфигурации $e^0(0) = B$, $e^\lambda(0) = 1$. Плотность энергии и давление при $y = 0$ зависят от параметра S , определяющего решения и произвольной постоянной A .

$$\gamma_0^2 \frac{8\pi\delta}{c^4} \varepsilon(0) = 3(S-A-2), \quad \gamma_0^2 \frac{8\pi\delta}{c^4} p(0) = S+A+2 \quad (10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коркина М.П., Капитонов А.Г. // УФЖ. Т.26. № 5. С.843-845.
2. Коркина М.П., Киреев Ю.Н. // УФЖ. 1982. Т.27. № 11. С.1607-1613.
3. Tolman R.C. // Phys.Rev. 1939. Vol.55. P.364-368.
4. Adler R.J. // J.Math.Phys. 1968. Vol.33. P.541-544.
5. Kuchowicz B. // Acta Phys. 1974. Vol.15. P.727-730.
6. Коркина М.П. // Изв. Вузов. Физика. 1981. № 5. С.87-89.

ГРАВИТИРУЮЩАЯ МАТЕРИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

В.Г. Кречет

ЯГТИ / Ярославль /

В настоящее время в связи с обнаружением асимметрии поляризации излучения космических радиоисточников, объясняемой возможным космологическим вращением /Берч, 1982/, усилился интерес к исследованиям вращающихся космологических моделей. В нашей работе [1] была предложена метрика нестационарной вращающейся космологической модели без сдвига

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)[dx^2 + \kappa a^2(x)dy^2 + dz^2] + 2R(t)b(x)dydt \quad (1)$$

в которой при $\kappa \geq 0$ существует причинная структура (отсутствие замкнутых времени-подобных кривых); если $R(t) = 1$, то имеем стационарную вращающуюся космологическую модель с причинной структурой - обобщение вращающейся модели Геделя, в которой $\kappa = -1/2$, $\omega^2 = \kappa \epsilon / 2$. Условия однородности пространства и одинаковости угловой скорости вращения ω модели во всех точках

$$\frac{d}{dx}(\kappa a^2 + b^2) / (\kappa a^2 + b^2); \quad \omega = \frac{db/dx}{2R(t)\sqrt{\kappa a^2 + b^2}} = \frac{const}{R(t)} \quad (2)$$

приводят к однозначному выражению метрических коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$: $a(x) = b(x) = e^{\lambda x}$.

Возникает вопрос о видах материальных распределений, определяющих существование и эволюцию однородной вращающейся космологической модели (1), (2). Показано, что гравитирующая система, состоящая из идеальной жидкости, свободного безмассового скалярного поля Ψ и потока тепла qV_α ($V_\alpha V^\alpha > 1$) определяет эволюцию рассматриваемой вращающейся космологической модели. Точное решение совместной системы уравнений Эйнштейна и гравитирующей материи

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa[(p+\epsilon)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} + \Psi_{,\alpha}\Psi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Psi_{,\sigma}\Psi^{,\sigma} + qV_\alpha V_\beta]; \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}(g^{\alpha\beta}\Psi_{,\beta})_{,\alpha} = 0 \quad (3)$$

для метрики (1), (2) следующее:

$$R(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\kappa}} \cdot t; \quad u^\alpha = \delta^\alpha_4; \quad V^\alpha = (0, V', V', 0); \quad \sqrt{q}V' = \sqrt{\kappa}V'^2 = \sqrt{8\kappa}/(\lambda(\kappa+1)t^2); \quad \Psi = \lambda z; \quad \sqrt{\kappa}PR^2 = \kappa\lambda^2/(2(\kappa+1)); \quad \epsilon = -3p \quad (4)$$

т.е. имеем вращающуюся космологическую модель с причинной структурой ($\kappa > 0$), с постоянной скоростью расширения, равной $\lambda/(2\sqrt{\kappa})$ и с начальной сингулярностью.

Аналогичные результаты получаются при рассмотрении гравитирующей системы, состоящей из идеальной жидкости, заряженной двухкомпонентным безмассовым скалярным полем (φ, ψ) и излучения (тензор энергии-импульса излучения определяется выражением $T_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} K$; $K, K' = 0$). Соответствующее точное решение имеет вид

$$\begin{aligned} R(t) &= \lambda(1+2\kappa)t/(2\sqrt{1-\kappa}); \quad -1 < \kappa < \frac{1}{2}; \quad \varphi = \alpha_1 t + \beta_1 x/\sqrt{1+\kappa}; \\ \psi &= \alpha_2 t + \beta_2 x/\sqrt{1+\kappa}; \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 2\kappa/(1+2\kappa); \\ \beta_1^2 = \beta_2^2 &= -\frac{\lambda^2(1+2\kappa)}{2}; \quad \sqrt{x} \varepsilon = \frac{2\kappa(1+4\kappa)}{(1+2\kappa)^2 t^2}; \quad (c \equiv \lambda(1+2\kappa)/(2\sqrt{1-\kappa})) \\ \sqrt{x} \rho &= -2\kappa(1+2\kappa+3\kappa^2)/(t^2(1+\kappa)(1+2\kappa)^2); \\ \rho_1 &= 2\alpha_1 \kappa / t^2 (1+\kappa) - \beta_1 \lambda / c^2 t^2; \quad \rho_2 = 2\alpha_2 \kappa / t^2 (1+\kappa) - \frac{\beta_2 \lambda}{c^2 t^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 плотности зарядов скалярных полей φ, ψ . Решение (5) также определяет однородную вращающуюся космологическую модель с постоянной скоростью расширения $c = \frac{\lambda(1+2\kappa)}{2\sqrt{1-\kappa}}$, но с наличием замкнутых времени-подобных кривых.

Показано, что гравитирующая жидкость с внутренним моментом $S_{\alpha\beta\rho} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} S^\sigma$ определяет стационарную вращающуюся космологическую модель с причинной структурой ($\kappa \geq 0$). Тензор энергии-импульса спинирующей жидкости следующий [2]:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + \varepsilon) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} + \nabla_{(\alpha} (u^\rho S^\sigma) \varepsilon_{\beta)\rho\sigma} u^\lambda + \varepsilon (\alpha_{\lambda\rho\sigma} u_\beta) \nabla^\lambda (u^\rho S^\sigma). \quad (6)$$

Здесь вектор плотности внутреннего момента S^λ удовлетворяет закону сохранения

$$\nabla_\sigma (u^\sigma S_\lambda) = (\nabla_\sigma u_\lambda) S^\sigma - (\nabla_\lambda u_\sigma) S^\sigma \quad (7)$$

Соответствующее решение следующее:

$$S^\lambda = \delta_3^\lambda (-\lambda); \quad \rho = \varepsilon = \frac{3}{4} \lambda^2; \quad \kappa = 0; \quad u^\lambda = \delta_4^\lambda. \quad (8)$$

В полученной стационарной вращающейся космологической модели, в отличие от модели Геделя, где $\kappa = \frac{1}{2}$; $\omega^2 = \varepsilon x/2$ нет замкнутых времени-подобных кривых и не обязательно присутствие космологического члена Λ .

Литература

1. Кречет В.Г. - Известия вузов СССР, Физика, 1985, №12, с.9.
2. Желнорович В.А. Теория спиноров и ее применение в физике и математике, М., Наука, 1982.

О ФИЗИЧЕСКОМ ИСТОЛКОВАНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОТО
С ПОМОЩЬЮ ЯВЛЕНИЯ УВЛЕЧЕНИЯ

Н.В. Мипкевич

УДН им. П. Думумбы (Москва)

Физическое истолкование решений уравнений Эйнштейна часто вызывает значительные трудности ввиду универсальности гравитационного взаимодействия (не существует "нейтральных" по отношению к гравитации объектов, с движением которых было бы можно сравнивать движение пробных масс и фотонов, как не существует и глобального плоского пространства Минковского, с которым было бы возможно сравнение). Поэтому приходится апеллировать к относительному движению пар или большего числа пробных частиц, в том числе в мысленных экспериментах.

Одним из явлений (т.е. не отдельных эффектов, а их совокупностей), позволяющих сравнительно наглядно анализировать гравитационные поля на основе поведения в них пробных частиц, является явление увлечения. Представления о нём формулировались многими авторами (см., например, [1, 2]), однако чёткость этих формулировок оставляет желать лучшего. Можно понимать увлечение в более или менее широком смысле. Во втором случае (увлечение в узком смысле) речь идёт о квазимагнитном гравитационном взаимодействии, и фактически (явно или неявно) так чаще всего понимают увлечение вообще. Справедливо утверждение: всякому электромагнитному полю или эффекту соответствует его гравитационный аналог (обратное, конечно, было бы неверно). Поэтому под квазимагнитным гравитационным полем следует понимать гравитационный аналог магнитного поля, если аналогом электрического поля в теории гравитации считать, например, поле Шварцшильда (по крайней мере, вне горизонта). Выделим два главных пути проведения такой аналогии: на уровне кривизны (см., например, [3], стр. 140) и на уровне характеристик систем отсчёта, [4]. Так как нас будут интересовать уравнения геодезической, а не девиации, сосредоточим внимание на втором пути; тогда аналогом магнитного поля в гравитации будет вращение системы отсчёта. В отличие от теории электромагнетизма, такие квазимагнитные (да и квазиэлектрические) гравитационные поля устраняются выбором системы отсчёта (принцип эквивалентности) локально, а также

в конечной области, где нормальная геодезическая конгруэнция ещё не самопересекается. Однако такая система отсчёта в не-тривиальных случаях может уступать перед вращающейся и даже ускоренной системой, если последняя отвечает симметрии задачи (изометрии пространства-времени). В первом случае (увлечение в широком смысле) возможно и всеобъемлющее толкование увлечения, однако оно представляется менее плодотворным.

Мы говорим о рассмотрении пар или большего числа пробных частиц, но не об анализе уравнений девиации геодезических. Это не парадокс, так как каждая из частиц по отдельности должна двигаться (в смысле внешних или внутренних степеней свободы) особым образом, дискретно отличаясь в этом отношении от других частиц рассматриваемого множества. Только тогда и можно выделить эффекты явления увлечения.

С другой стороны, для чёткой интерпретации увлечения нужно, чтобы вращающаяся система отсчёта была привилегированной, т.е. чтобы вращалась киллингова конгруэнция (в нестационарных задачах чёткая формулировка ещё не достигнута). Значит, речь идёт пока о существенно стационарных гравитационных полях (в статических квазимагнитного гравитационного поля нет). Очевидным примером такого поля является поле Керра. В этом случае вращение центрального "тела" (мы не касаемся проблемы внутреннего вращения) генерирует квазимагнитное гравитационное поле вокруг него, отвечающее за эффекты увлечения. Глобальное вращение, сопутствующее вращению центрального "тела", невозможно, и это обстоятельство объективизирует смысл эффектов увлечения, связывая их не с выбором системы отсчёта, а с природой самого поля и его источников, т.е. позволяя надеяться на плодотворность предлагаемого подхода с точки зрения истолкования решений уравнений ОТО.

Другим примером квазимагнитного гравитационного поля является поле световой нити [5], источник которого движется вдоль самого себя со скоростью света. Такому движению невозможно сопутствовать, что опять-таки объективизирует и само квазимагнитное поле, и эффекты увлечения в нём. Менее наглядны, но также относятся к проявлениям явления увлечения эффекты в поле НУТ, хотя стационарность этого поля не связана ни с вращением, ни со светоподобным характером дви-

жения источника. Ясно, что это же касается некоторых других точных решений уравнений Эйнштейна, начиная с метрики Керра-Ньюмена. Как мы уже сказали, в нестационарных полях явление увлечения обьективизировать труднее, и первые шаги в этом направлении несомненно связаны с анализом вращающейся метрики Вайдя.

Коротко укажем суть эффектов увлечения в названных полях. В поле Керра анализ проводился особенно подробно (см. [2, 6, 7]). Он касался и прецессии гироскопа, и движения бесструктурных частиц. В последнем случае период обращения частиц в направлении вращения центрального тела и в противоположном направлении различается на $4\pi a$ (a — параметр Керра). Для световой нити эффект состоит как в увлечении свободно падающей на нить частицы вдоль нити, так и в полном отсутствии взаимодействия между взаимно параллельными (не антипараллельными!) нитями, т.е. в аддитивности соответствующих решений. В поле НУТ явление увлечения проявляется как сдвиг плоскости орбиты пробной частицы в направлении орбитального момента. Все эти эффекты имеют свои аналоги в электродинамике.

В заключение вспомним, что явление увлечения — одно из выражений принципа Маха, который, хотя, быть может, не вполне реализуется в ОТО, но фундаментален для физики. 18 февраля 1988 года исполняется 150 лет со дня рождения учёного, внёсшего важный вклад во многие разделы физики, большого гуманиста и антиклерикала [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977.
2. Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр. М.: Мир, 1986.
3. Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.
4. Мишкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И. Динамика полей в общей теории относительности. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. Mitišević N.V. Gravitational field of a pencil of light // Exper. Techn. d. Physik. 1981. Bd.29. S.213.
6. Мишкевич Н.В., Пулидо Гарсия И.// ДАН СССР. 1970. Т.192. С. 1263.
7. Vladimirov Yu., Mitišević N., Horák J. Space, time, gravitation. M.: Mir Publishers, 1987.
8. Herneck P.// Wiss. ZS. d. Humboldt-Univers. zu Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe. Jg. VI (1956-57). Nr.3. S.209.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТУЛАТЫ ОТО И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В.А.Унт

Институт астрофизики и физики атмосферы
АН ЭССР (Тыравере)

1. Часто ОТО дополняют постулатами без исследования непротиворечивости результирующей системы уравнений. Хорошо известный пример недопустимого дополнения уравнений Эйнштейна – постулирование независимых уравнений движения источников: в ОТО уравнения движения содержатся в уравнениях поля. Несовместимыми с уравнениями Эйнштейна оказываются и условия гармоничности. Последние применимы только в тех случаях, когда можно пренебрегать энергией излучения [1].

Цель данного сообщения показать, что анализ точных решений может выявить внутреннюю противоречивость системы, состоящей из уравнений Эйнштейна и дополняющих их постулатов. На примере решения Райсснера-Нордстрема покажем, что постулаты аналитического (или C^k) продолжения и условие энергодоминантности несовместимы.

2. В ОТО принято считать, что физическое ПВ (пространство-время) можно максимально продолжать, а локальная плотность энергии вещества всегда положительна. Эти положения сформулированы в виде следующих постулатов.

I. Модель ПВ должна быть C^k нерасширяемой ([2], стр.70). Недопустимо, чтобы из ПВ были удалены регулярные области.

II. Источники гравитационного поля должны удовлетворять условию энергодоминантности ([2], стр. 104): $T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu \geq 0$, $T^{\mu\alpha}u_\alpha$ – непространственно-подобный четырехвектор. Здесь $T^{\mu\nu}$ – ТЭИ (тензор энергии-импульса) вещества, а u_α – четырехскорость произвольного наблюдателя. В случае покоящегося в стационарном ПВ наблюдателя из условия энергодоминантности следует $T^0_0 \geq 0$.

На постулатах I и II базируются теоремы о сингулярностях [2], на постулате II – теорема о положительности полной энергии (см. обзор [3]).

3. Решение Райсснера-Нордстрема следующее:

$$ds^2 = (1 - 2m/r + e^2/r^2) dt^2 - (1 - 2m/r + e^2/r^2)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (I)$$

где m - масса, а e - электрический заряд источника; используются единицы, в которых гравитационная постоянная Ньютона $\gamma = 1$ и скорость света $c = 1$. Далее ограничимся случаем $e^2 > m^2$, когда $1 - 2m/r + e^2/r^2 > 0$ при всех $r > 0$. Электрон имеет $e \approx 10^{-34}$ см, $m \approx 10^{-55}$ см.

Решение (I) описывает гравитационное поле точечного заряда, а также внешнее поле любого заряженного центрально-симметрического источника включая нестатические конфигурации [4]. Далее рассмотрим регулярные источники конечных размеров.

4. В случае метрики

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

уравнение Эйнштейна [5]

$$\frac{d}{dr} (e^{-\lambda} r) = 1 - 8\pi r^2 T_0^0$$

имеет регулярное решение

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r T_0^0 r'^2 dr' \equiv 1 - \frac{2M(0,r)}{r}, \quad \frac{1}{4\pi} M(a,b) \equiv \int_a^b T_0^0 r'^2 dr'.$$

Пусть $T_\mu^\nu = M_\mu^\nu + E_\mu^\nu$, где E_μ^ν - электромагнитная часть ТЭИ T_μ^ν . Пусть $m \equiv M(0,\infty)$. В электровакууме $T_0^0 = E_0^0 = \frac{e^2}{8\pi r^4}$, $M(0,r) = M(0,\infty) - M(r,\infty) = m - e^2/2r$ и мы имеем решение (I). Когда электровакуум продолжен до точек $a < e^2/2m$ получаем $M(0,a) < 0$, что ведет к противоречию с условием энергодоминантности: $M(0,a) \equiv 4\pi \int_0^a T_0^0 r'^2 dr' < 0$. Этому факту можно дать следующее объяснение [6]. Масса m - это полная масса, включающая массу как электромагнитного поля, так и других источников. Продолжая решение внутрь сферы радиусом a , получаем для электромагнитной массы $m_{el} > m$. Плотность энергии электромагнитного поля E_0^0 всюду положительная. Следовательно, должно существовать вещество с отрицательной плотностью $M_0^0 < 0$, которое дает $m_{mat} = 4\pi \int_0^\infty M_0^0 r'^2 dr' < 0$. Действительно, когда $m_{el} \equiv 4\pi \int_0^\infty E_0^0 r'^2 dr' > m$ мы имеем $m = m_{el} + m_{mat}$ только при $m_{mat} < 0$.

В случае точечной заряженной массы нужно ввести бесконечную отрицательную массу m_{mat} , которая вместе с бесконечной положительной электромагнитной массой m_{el} дает конечную отрицательную массу m [7].

5. Отрицательная плотность вещества T_0^0 вызывает гравитационное отталкивание. Кроме того, область ПВ с гравитационным отталкиванием существует также при T_0^0 , если $T_0^0 < T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$. Примером этому может послужить точное решение для сферы, состоящей из равновесной заряженной идеальной жидкости [8].

6. Для преодоления возникших выше противоречий можно согласно Маху и др. [9], отказаться от условия энергодоминантности, следуя Широкову [10], Пекерису [11] и многим другим, вырезать из пространства конечные сферы радиусом $r = r_0$. Удаление конечных областей пытаются часто завуалировать переходом к новой координате $r = r(R)$, $0 \leq R < \infty$, $r(0) = r_0$. Наконец можно развить и теорию протяженного электрона, совместимого с постулатами I и II. Лишнеровикс [12] считает, что мировую линию сингулярности нужно всегда заменить мировой трубкой. Допустимые значения диаметра трубки определены условиями энергодоминантности.

При всех отмеченных здесь подходах возникают трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Унт В. Принцип эквивалентности, привилегированные координаты и энергия излучения в ОТО. Таллин: АН ЭССР, 1988.
2. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
3. Choquet-Bruhat Y. // *Relativité, groups et topologie II* - 1983. Elsevier Science Publishers B.V., 1984. P. 739.
4. Hoffman B. // *Quart. Journ. Math. Oxford*. 1933. Ser. 3. Vol. 4. P. 179.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
6. Unt V. Analytical Extension of the Reissner-Nordström Solution, the Dominant Energy Condition and Gravitational Repulsion. Таллин: АН ЭССР, 1987.
7. Tangherlini F.P. // *Nuovo Cimento*. 1962. Vol. 26. P. 497.
8. Tiwari R.N., Rao J.R., Kanakamedala R.R., // *Phys. Rev*. 1984. Vol. D30. P. 489.
9. Mahajan S.M., Quadir A., Valanju P.M. // *Nuovo Cimento*. 1981. Vol. 65B. P. 404.
10. Широков М.Ф. // *ЖЭТФ*. 1948. Т. 18. С. 236.
11. Pekeris C.L. // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1982. V. 79. P. 6404.
12. Lichnerowicz A. *Problèmes globaux en mécanique relativiste*. Paris: Hermann, 1939.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.А.Коппель

ТГУ (Тарту)

В теории Эйнштейна модели релятивистского /рел./ гравитационного поля /г-поля/ (ψ_4, g) определяются решениями эйнштейновых уравнений /ЭУ/ г-поля

$$Rc = \Pi \Leftrightarrow R_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} \quad (1)$$

(Rc - тензор Риччи для псевдориманова 4-пространства ψ_4 ; $\Pi_{\mu\nu} \equiv \kappa(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$, где $\bar{T}_{\mu\nu}$ - компоненты тензора материи). Определенные решения ЭУ обычно задаются конкретными видами метрики g в какой-то локальной коорд. системе $\{x^i\}$ для области $D \subset \psi_4$. В то же время всегда можно в векторном касательном расслоении задать поля ортореперов Минковского $\Gamma(\mathcal{L}) = \bigcup_{P \in D} \{\Gamma_P, e_a\}$, определяемых в $\forall P \in D$ с точностью до обобщенных преобразований Лоренца. Таким образом, для метрической формы /м-формы/ будем иметь

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha; a', a'', \dots) dx^\mu dx^\nu = \omega^i \omega^j - \eta^{-2} (\omega^i)^2, \quad (2)$$

причем $\eta = v_w c' \ll 1$, v_w - "предельная" нерелятивистская /НР/ скорость, $x^\mu = v_w x^0$ - т. наз. "ракетное время"; $\omega^i = e^i_\mu(x^\alpha; a', a'', \dots) dx^\mu$, a', a'', \dots - свободные параметры решения.

Исходя из возможности задания как ЭУ (1), так и их решений в виде м-форм (2) в определенных коорд. реперах и в то же время в определенных полях $\Gamma(\mathcal{L})$ и пользуясь параметром η , нами разработан общий подход к нахождению НР пределов (аналогов) данных рел. моделей г-поля, который, на наш взгляд, с одной стороны, опирается на возможно меньшее число общих (обязательно нужных и естественных) предположений, а, с другой стороны, может служить универсальным строгим способом выделения "НР ингредиентов" любых рел. моделей. Учитывая основные работы по НР пределу ОТО, начиная с Картана [1], и подводя определенный итог, мы пришли к выводу, что такими общими предположениями являются [2-5]:

А/ Фундаментальным следует считать единую геометризированную формулировку как рел., так и НР теорий гравитации. При этом рел. модели (ψ_4, g) нужно рассматривать как зависящие

от определенного единого параметра η , фиксированное значение которого $\eta = 0$ выделяет НР модели Γ -поля.

В/ Физика модели (ψ_4, g) как решения ЭУ открывается самым естественным образом при задании этого решения в определенной системе отсчета /С.О./, в качестве которой мы рассмотрим поле ортореперов $\Gamma(\mathcal{L})$ и в которой оказывается возможным четкое (3+1)-расщепление ψ_4^t на пространство и время. После задания в определенной С.О. "пара" (ψ_4^t, g) заменяется уже "тройкой" (ψ_4^t, h, ω^t) , где вырожденный 4-мерный тензор h , ортогональный временной 1-форме ω^t , имеет составляющие

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta^{-2} e_\mu^i e_\nu^i = \delta_{ix} e_\mu^i e_\nu^i \Leftrightarrow h_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^i \delta_\beta^j \quad (3)$$

и характеризует метрику локальных 3-мерных сечений ψ_3^t . Рел. модель g -поля (ψ_4^t, h, ω^t) характеризуется базисными 1-формами ω^t , коэффициентами связности $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, тензором кривизны $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тензором h , причем в эти величины теперь четко должен войти параметр η - либо непосредственно в силу (2), либо через свободные параметры $\alpha(\eta), \alpha'(\eta), \dots$

В/ НР модели g -поля $(\psi_4, \tilde{g}, \tilde{\omega}^t)$, являющиеся строгими пределами рел. моделей (ψ_4, g) , получаются в результате $\eta \rightarrow 0$ как их асимптотический вид при обязательных условиях:

$$\tilde{\Gamma} \tilde{\omega}^t, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha, \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \det \tilde{h} \neq 0, \lim_{\eta \rightarrow 0} (d\omega^t) = 0 \quad (4)$$

(здесь тильда обозначает конечные (нерасходящиеся) предельные значения: $\tilde{f} = \lim_{\eta \rightarrow 0} f$). ψ_4 - 4-пространство, в котором связность и кривизна определяются величинами $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ и $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, причем должна удовлетворяться предельная форма ЭУ (1):

$$\tilde{R}c = \tilde{\Pi}. \quad (5)$$

$\tilde{g} = \tilde{h}$ определяет в $\tilde{\psi}_4$ вырожденную метрику с сигнатурой $(+, +, +, 0)$; $\tilde{\omega}^t = d\tilde{x}^t$. Теперь (3+1)-расщепление ψ_4^t перешло в абсолютное; поле $\Gamma(\mathcal{L})$ - в поле $\Gamma(\eta)$ 3-мерных декартовых ортореперов со скалярным полем абсолютного НР времени \tilde{x}^t ; локальная Лоренц-ковариантность - в Галилей-ковариантность.

Вышеприведенными общими предположениями А, Б, В даны основы универсального и единого подхода к т. наз. НР анализу решений ЭУ. Можно убедиться, что строгие следствия, получаемые при таких предположениях из соотношений ОТО, уже обязательно относятся к НР пределу этой теории. Иерархия таких следствий

рассмотрена нами в ряде работ (см., напр., [2-5]). Перечислим здесь кратко лишь основные выводы.

1⁰ С методологической точки зрения для строгого выделения НР предела особо важным является точная явная запись зависимости величин от характеристического параметра η .

2⁰ Конкретный вид основных уравнений НР г-поля задается уравнениями (5), которые также налагают дополнительные условия, с одной стороны, на структуру тензора материи T , а, с другой стороны, на предельные значения тензоров кривизны как \hat{U}_4 , так и НР физического 3-пространства \hat{U}_3 . Динамические свойства НР г-полей определяются предельным видом уравнений геодезических линий и геодезического отклонения. Аксиоматика, специально сформулированная во многих работах для построения геометризованных моделей ньютоновых НР г-полей, при нашем подходе по существу излишня.

3⁰ Чтобы физически осмыслить коорд. систему $\{x\}$, в которой задано определенное решение ЭУ (2), следует $\{x\}$ связать с полем $\Gamma(\mathcal{X})$, пользуясь определенными калибровочными условиями для e_μ^a . Далее, из требования выполнения (4) получается нужная т. наз. \mathcal{R} -структура как e_μ^a , так и $g_{\mu\nu}$ (см. [3-5]). Отсюда следуют основы систематического анализа возможностей включения η в свободные параметры $a(q), a''(q), \dots$ различного типа в m -формах (2) при условии существования НР предела, а также основы строгого анализа проблемы однозначности НР предела определенного решения ЭУ [4].

4⁰ Получаются строгие соотношения между различными представлениями одного и того же НР г-поля (в различных С.О. с нежесткими и жесткими 3-мерными координатами, с помощью 4-мерных и 3-мерных характеристик).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. // Ann. de l'Ecole Normale Sup. 1923. Vol. 40. P. 325; 1924. Vol. 41. P. 1.
2. Коппель А.А. // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1980. № 520. С. 24.
3. Коппель А.А. // Тезисы докл. УИ Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984. С. 60.
4. Коппель А.А. // "Гравитация и теория относительности", вып. 25. Казань: Изд. КГУ, в печати.
5. Коппель А.А. // Труды Ин-та физ. АН ЭССР. 1987. Т. 62. С. 21.

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВАКУУМНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ pp -ВОЛН

А.А.Коппель

К.П.Пало

ТГУ (Тарту)

ИФ АН ЭССР (Тарту)

В данной работе метод нерелятивистского /НР/ анализа (см. [1], а также [2]) применяется в случае релятивистской /рел./ вакуумной метрики $(\hat{g}; g)$, описывающей плоско-фронтные гравитационные волны /г-волны/ с параллельными лучами, т.е. pp -волны в вакууме (см. [3], а также [4], § 2I.5). Согласно формуле (2I.38) в [4] запишем данную метрику в виде

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - 2du dv - 2H du^2 = \omega^1 \omega^1 - \eta^2 (\omega^4)^2, \quad (I)$$

где вакуумном случае функция $H = H(x^1, x^2, u)$ должна удовлетворять единственному уравнению

$$H_{,1,1} + H_{,2,2} = 0, \quad (2)$$

причем зависимость от координаты u остается произвольной (запятая с индексом означает дифференцирование по соответствующей координате).

Связь коорд. системы (x^1, x^2, u, v) с полем ортореперов Минковского $I'(\mathcal{L})$, трактуемым как система отсчета /С.О./, устанавливается выбором т.наз. хронометрических коорд. систем. Для базисных I-форм $\omega^{\hat{a}}$ в (I) получаем

$$\omega^{\hat{1}} = h_5^{\hat{1}} dx^5 = dx^1, \quad \omega^{\hat{2}} = h_5^{\hat{2}} dx^5 = dx^2, \quad \omega^{\hat{3}} = h_5^{\hat{3}} dx^5 = e^{-U} dx^3, \quad (3)$$

$$\omega^{\hat{4}} = h_5^{\hat{4}} dx^5 + h_4^{\hat{4}} dx^4 = -2\eta^{\frac{1}{2}} h U dx^3 + e^U dx^4,$$

где пространственная координата x^3 и т.наз. ракетное время $x^4 = \sqrt{\eta} x^0$ определяются соотношениями

$$x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u), \quad x^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(v + u) \quad (4a)$$

или, наоборот,

$$\rho \equiv \sqrt{2}\eta u = x^4 - \eta x^3, \quad r \equiv \sqrt{2}\eta v = x^4 + \eta x^3. \quad (4b)$$

Поскольку зависимость функции H от u ничем не ограничивается, то с точки зрения перехода к НР пределу естественно принять в качестве нового волнового аргумента $\rho \equiv \sqrt{2}\eta u$, причем

$$H = H(x^1, x^2, \rho) = e^{2U} - 1, \quad U = U(x^1, x^2, \rho). \quad (5)$$

Для независимых и ненулевых коэффициентов связности в $\hat{\psi}^{\hat{a}}$

получаем ($l, m, \dots = 1, 2$; $U, P \equiv \frac{\partial V}{\partial P}$)

$$\bar{\Gamma}_{424}^1 = -\eta^{-2} U_{,2}, \quad \bar{\Gamma}_{434}^1 = -\eta^{-1} U_{,P} \exp(-U), \quad (6)$$

$$\bar{\Gamma}_{234}^1 = \bar{\Gamma}_{243}^1 = -\eta^{-1} U_{,2}, \quad \bar{\Gamma}_{343}^1 = -U_{,P} \exp(-U), \quad \bar{\Gamma}_{323}^1 = -U_{,2},$$

а для независимых и ненулевых компонент тензора кривизны -

$$R_{44}^{11} = \eta^{-1} (U_{,2} + 2 U_{,2} U_{,m}) = \frac{1}{2} \eta^{-2} (1+H)^{-1} H_{,2,m}, \quad (7)$$

$$R_{23m4} = R_{24m3} = -\eta R_{44}^{11}, \quad R_{23m3} = \eta^2 R_{44}^{11}.$$

Формулы для тензора Риччи и скалярной кривизны:

$$R_{44} = \frac{1}{2} \eta^{-2} (1+H)^{-1} (H_{,1,1} + H_{,2,2}), \quad R_{33} = -\eta R_{44} = \eta^2 R_{44}^{11}, \quad (8)$$

$$R_{11} = 0; \quad R = 0.$$

Формулами (3)-(8) изучаемая модель рел. г-поля (\hat{v}_4, g) теперь уже задана "тройкой" (\hat{v}_4, h, ω^4), причем вырожденный 4-мерный тензор h (см. формулу (3) в [2]) имеет компоненты

$$h_{\mu\nu} = \delta_\mu^s \delta_\nu^p h_{sp}, \quad \|h_{sp}\| = \|h_s^i h_p^j\| = \text{diag}(1, 1, e^{-2U}). \quad (9)$$

Чтобы модели рел. г-полей, заданные метрикой (I) и соотношениями (3)-(9), имели НР предел, т.е. выполнялись условия (4) в работе [2] и вытекающие из них условия для R -структуры компонент тетрады h_s^i в (3):

$$R(h_s^i) = 1 + O_2(h), \quad R(h_s^j) = O_2(h_s^j), \quad R(h_{sp}) = O_0(h_{sp}), \quad (10)$$

обязательно должно иметь место

$$R(U) = O_2(U) \Leftrightarrow U = \eta^2 \tilde{U} + O_3(U'), \quad (11)$$

причем \tilde{U} больше не содержит параметра η . (Здесь $h = h_s^i - 1$, а $O_2(f)$ означает, что $\lim_{\eta \rightarrow 0} (\eta^2 f) = 0$ при любом положительном ε .)

4-мерное описание получаемой НР модели г-поля задается тройкой $(\tilde{v}_4, \tilde{g}, \tilde{\omega}^4)$, где 4-мерное искривленное многообразие \tilde{v}_4 определяется предельными значениями связности (6) и кривизны (7) (см. [1-2]). В силу (11) ненулевыми являются

$$\tilde{\Gamma}_{114}^1 = -\tilde{U}_{,2}, \quad \tilde{R}_{44}^{11} = \tilde{U}_{,2,m} \quad (12)$$

(отсюда сразу вытекает, что НР г-поле ньютоново). Из (9) следует для предельной вырожденной метрики $\tilde{g} = \tilde{h}$ в \tilde{v}_4 : $\|\tilde{h}_{sp}\| = \text{diag}(1, 1, 0)$, а 1-форма $\tilde{\omega}^4 = d\tilde{x}^4$ определяет скалярное поле абсолютного НР времени $t = \sqrt{\tilde{g}} \tilde{x}^4$. В данном случае 3-мерное представление предельного НР г-поля задается в евклидовом \tilde{v}_3 с декартовыми координатами $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$, причем сог-

ласно общей теории (см. [1-2] и соответствующие ссылки в них) ньютонов потенциал имеет вид

$$\phi = \tilde{U}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3). \quad (13)$$

Учитывая (4)-(5), в силу уравнений (2) этот зависящий от времени потенциал НР г-поля определяется уравнением

$$\tilde{U}_{,11} + \tilde{U}_{,22} = 0. \quad (14)$$

Динамическое воздействие НР г-поля на пробные частицы описываются предельными уравнениями геодезических линий и геодезического отклонения, принимающими в силу (12) вид

$$\frac{d^2 \tilde{x}^M}{(d\tilde{x}^4)^2} = -\tilde{U}_{,M}, \quad \frac{d^2 \tilde{\eta}^M}{(d\tilde{x}^4)^2} = -\tilde{U}_{,LM} \tilde{\eta}^L. \quad (15)$$

В направлении координаты \tilde{x}^3 силы тяготения и гравитационного отклонения в НР пределе отсутствуют.

Итак, определенные характерные черты рел. г-поля ρ -волн по существу сохраняются и в НР пределе. Конкретная зависимость амплитуды рел. г-волны от волнового аргумента u (или в силу (46) от ρ) "имитируется" зависимостью НР потенциала ϕ (13) от времени \tilde{x}^4 . В частном случае метрики (I) именно с этой точки зрения изучил ее НР предел Элерс [5].

Дополнительно отметим, что, как известно, рел. метрика (I) может описывать также г-волны с изотропным электромагнитным полем. Поскольку в силу (5), (8) и (II) $R_{44} = \lim_{q \rightarrow 0} R_{44}^q$ может иметь и конечное ненулевое предельное значение, то, как показывает соответствующий анализ, отсюда вытекает и возможность существования такого нетривиального НР предела, при котором сохраняется определенная плотность энергии (массы) электромагнитного поля как источника НР г-поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель А.А.// Труды Ин-та физ.АН ЭССР.1987. Т.62. С.21.
2. Коппель А.А.// Настоящий сборник. С.36.
3. Ehlers J., Kundt W.// Gravitation: an introduction to current research. New York, London: 1962.
4. Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Berlin:VEB DWW,1980.
5. Ehlers J.// Grundlagenprobleme der modernen Physik. Bibl. Inst. Mannheim,Wien,Zürich, 1981. S.65.

ПРИМЕНЕНИЯ НОВОГО МЕТОДА АНАЛИЗА МУЛЬТИПОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ:
НАХОЖДЕНИЕ И АНАЛИЗ НОВЫХ ТОЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ АКСИАЛЬНО-
СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.А.Коппель, А.А.Ихерманн
ТТУ (Тарту)

На основе разработанного нами нового практического метода вычисления и анализа мультипольной структуры асимптотически плоских /АП/ стационарных аксиально-симметричных /САС/ электровакуумных /элвак./ и вакуумных /вак./ 4-пространств [1-2] оказывается возможным решать различные задачи. С точностью до определенного приближения можно вычислить соотношения между свободными параметрами конкретных АП САС элвак. или вак. решений эйнштейновых уравнений /ЭУ/ и мультипольными моментами типа Торна или Хансена. С помощью этих соотношений можно провести на единой основе сравнительный анализ различных классов АП САС решений, можно получить в определенных координатных системах и полях локальных ортореперах общие мультипольные разложения для метрических функций и других различных физико-геометрических характеристик АП САС гравитационных и электромагнитных полей и т.д.

Пользуясь данным нами методом и предполагая АП характер исходных и новых решений, нами проведен анализ мультипольной структуры определенных новых классов АП САС элвак. и вак. метрик, которые могут быть найдены с помощью некоторых вариантов современных эффективных методов генерации новых точных решений ЭУ [3-5]. Выяснен механизм изменения мультипольной структуры (до квадрупольного или октупольного приближения включительно) в процессе генерации новых точных решений (см., напр., [6-7]). Подчеркнем здесь особо, что такой анализ возможен уже до явной генерации новых конкретных решений и таким образом можно также получить в определенных пределах рецепты для нахождения решений ЭУ с заданной мультипольной структурой.

Нами разработаны и внедрены в конкретные исследования пакеты программ для системы аналитических вычислений REDUCE 3.1 на ЭВМ, позволяющие автоматизировать вышеперечисленные вычисления (напр. [8]).

В качестве примера нахождения новых решений ЭУ по вышеупомянутым "рецептам" приведем здесь явные аналитические формулы для точной трехпараметрической АП САС вак. метрики, найденной нами с помощью метода генерации односолитонных АП САС вак. решений типа Нойгебауэра [3] при определенном исходном (фоновом) АП статическом АС решении. Если записать САС метрику в виде

$$ds^2 = \lambda^{-1} [e^{2k} \sigma^2 (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + \sigma^2 (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2] - \lambda [Ad\varphi + dt]^2, \quad (I)$$

то в случае нашего нового точного решения получим для метрических функций $\lambda \equiv e^{2U}$, A , k (см. также [7]):

$$\lambda = 2BD^{-1} \exp(2U_0), \quad (2)$$

$$A = B^{-1} [\sigma Z + 2aB \exp(2U_0)] \exp(-2U_0), \quad (3)$$

$$e^{2k} = L^{-1} B \exp \left[\frac{1}{4} a^2 \sigma^2 R^{-4} (x^2 - 1)(1 - y^2)(1 - 9\sigma^2 R^{-2} x^2 y^2) \right], \quad (4)$$

где $R = \sigma(x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$, $\sigma^2 = b^2 - a^2$, а

$$U_0 = a, \sigma xy R^{-3}, \quad (5)$$

$$D = D_+ \exp(4U_0) + 2D_1 \exp(2U_0) + D_-, \quad (6)$$

$$Z = Z_+ \exp(4U_0) + (Z_1 + BP) \exp(2U_0) + Z_-, \quad (7)$$

$$B = (x^2 - 1)[H_- - H_+]^2 + (y^2 - 1)[1 + H_+ H_-]^2, \quad (8)$$

$$P = 2a, \sigma R^{-3} (x^2 - 1)(y^2 - 1), \quad (9)$$

$$L = -4(x^2 - y^2)H_- H_+, \quad (10)$$

$$D_{\pm} = (x^2 + 1)[H_- - H_+]^2 \pm 2x[H_-^2 - H_+^2] + (y^2 + 1)[1 + H_- H_+]^2 \pm 2y[1 - H_-^2 H_+^2], \quad (11)$$

$$D_1 = 2x(H_+ - H_-)(1 - H_+ H_-) + 2y(H_+ + H_-)(1 + H_+ H_-), \quad (12)$$

$$Z_{\pm} = (x^2 - 1)(H_- - H_+)[H_- H_+(1 \mp y) + (1 \pm y)] \mp (y^2 - 1)(1 + H_+ H_-)[H_-(x \pm 1) + H_+(x \mp 1)], \quad (13)$$

$$Z_1 = 2y(x^2 - 1)(H_-^2 - H_+^2) + 2x(y^2 - 1)(1 - H_-^2 H_+^2), \quad (14)$$

$$H_{\pm} = \pm \sigma(a + b)^{-1} \exp(2a, \sigma^2 \{1 - \sigma^2 R^{-3} [x(x^2 - 1) \pm y(y^2 - 1)]\}). \quad (15)$$

При вычислении метрических функций (2)–(4) также была использована система аналитических вычислений REDUCE 3.1 ЭВМ.

Мультипольная структура приведенной здесь новой метрики, вычисленная нами в октупольном приближении уже до получения явных формул (2)–(15), определяется тремя свободными параметрами решения β , a_1 , a , которые взаимно однозначно соответствуют трем независимым мультипольным моментам Хансена – массе M_0 , импульсному моменту J_1 и квадрупольному моменту массы M_2 . При этом будем иметь $J_0 = M_1 = J_2 = M_3 = 0$;

$$M_1 = \beta, J_1 = -a_1 - a\beta, M_2 = -a(2a_1 + a\beta), J_3 = a_1(2a^2 + \beta^2) + a^3\beta. \quad (16)$$

Полученная нами метрика (1)–(4) является решением Керра при $a_1 = 0$. Если $\lim_{\eta \rightarrow 0} [\eta^{-1} a_1] \neq 0$, где $\eta = v_\infty c^{-1}$ ($v_\infty \ll c$ – "предельная" нерел. скорость, $\eta \rightarrow 0 \Leftrightarrow c \rightarrow \infty$), то это найденное точное решение ЭУ пока единственное, которое в нерел. пределе соответствует компактному источнику, обладающему кроме массы M_0 независимым ненулевым нерел. дипольным вихревым моментом J_1 при исчезающем вихревом монополе $J_0 = 0$ [7].

Метрика (1)–(4) существенно отличается от нового трехпараметрического точного обобщения решения Керра, полученного в [9] с помощью НКХ-метода, изложенного в [4], причем исходным было решение Эреца-Розена. Этот результат непосредственно вытекает из вычисления мультипольной структуры по нашему методу и может служить примером познавательных ценностей метода при инвариантном сравнении решений ЭУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель А.А. // Гравитация и электромагнетизм – 1986. Минск: Университетское, 1987. С.54.
2. Koppel A. // Abstracts of Contr.Pap.11th Intern.Conf.on Gen.Rel.and Grav. Stockholm, 1986. Vol.1. P.174.
3. Neugebauer G. // J.Phys.A:Math.Gen.1980.Vol.13.P.L19,1737.
4. Hoenselaers C., Kinnersley W., Xanthopoulos B.C. // J.Math. Phys. 1979. Vol.20. P.2530.
5. Neugebauer G., Kramer D. // J.Phys.A:Math.Gen. 1983. Vol.16. P.1927.
6. Икхерманн А.А., Коппель А.А. // Гравитация и электромагнетизм – 1986. Минск: Университетское, 1987. С.38.
7. Коппель А.А. // Труды Ин-та физ.АН ЭССР.1987. Т.62. С.21.
8. Икхерманн А.А., Коппель А.А. // Гравитация и электромагнетизм – 1987. Минск: Университетское, в печати.
9. Quevedo H., Mashhoon B. // Phys.Lett.1985. Vol.A109. P.13.

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ БОЙЕРА-ЛИНДКВИСТА-ШВАРЦШИЛЬДА И
ЗАВИСИМОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ВАКУУМНОЙ
МЕТРИКИ ОТ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ХАНСЕНА

А.А.Коппель

Т.Р.Лембер

ТГУ (Тарту)

ТШЕДИ (Таллин)

Пусть 4-мерные многообразия (V_4, g) как стационарные аксиально-симметричные /САС/ вакуумные /вак./ решения эйнштейновых уравнений /ЭУ/ будут заданы в коорд. системах, присоединенных к соответствующим киллинговым векторным полям. Без ограничения общности можем таким метрикам придать вид

$$ds^2 = \lambda^{-1} \left\{ e^{2(k_0 + k)} \left[\frac{(dx^1)^2}{(y^1)^2} + \frac{(dx^2)^2}{(y^2)^2} \right] + (y^1 y^2)^2 (dx^3)^2 - \lambda [A dx^3 + dx^4]^2 \right\}, \quad (1)$$

где метрические функции λ, A, k зависят от координат x^1, x^2 :

$$\begin{aligned} x^1 \in [1, \infty), \quad y > 0, \quad x^2 \in [-1, 1], \quad x^3 \in [0, 2\pi), \\ x^4 \in [0, \infty), \quad y \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

μ и a_0 — пока произвольные коорд. параметры, $y = \mu^2 - a_0^2$, а $e^{2k_0} = (x^1)^2 - y(x^2)^2$, $(y^1)^2 = (x^1)^2 - y$, $(y^2)^2 = 1 - (x^2)^2$. (3)

Далее, полагая $y = \mu^2 - a_0^2 \neq 0$, введем для любых САС вак. метрик координаты r, ϑ, φ, t как обобщенные координаты Бойера-Линдквиста-Шварцшильда /ОБЛШ-координаты/:

$$x^1 = r - \mu, \quad x^2 = \cos \vartheta = x, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t. \quad (4)$$

Если функции λ, A, k в (1) зависят от вейлевых цилиндрических координат (ρ, z) или сферических (R, θ) , то с учетом (4) переход к ОБЛШ-координатам совершается с помощью формул

$$\rho = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta, \quad R^{-1} = S(x)^{-1}, \quad X = \cos \vartheta = Sx, \quad (5)$$

где $S := [1 - y^2(x)^{-2}]^{-1/2}$, $y = \sin \vartheta$, $x^1 = r(1 - \mu r^{-1})$.

В работах [1-2] показано, что для изучения асимптотически плоских /АП/ САС вак. решений ЭУ целесообразно пользоваться комплексным потенциалом Эрнста $\mathcal{E} = (1 - \mathcal{E})(1 + \mathcal{E})^{-1}$, заданным в сферических координатах (R, θ) и полностью характеризующим САС вак. решения ЭУ. Для АП САС вак. метрик \mathcal{E} имеет т. наз. \mathcal{O}_l -разложение $\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)} R^{-n}$. Нами показано [1, 2], что если найти коэффициенты \mathcal{O}_l -разложения \mathcal{E} на верхней полуоси симметрии ($\cos \theta = 1 \Leftrightarrow \rho = 0, z = R > 0$)

$$\mathcal{E}^{\uparrow} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}^{\uparrow(n)} R^{-n}, \quad \mathcal{E}^{\uparrow} =: M_e + i J_e, \quad (6)$$

то действительные постоянные M_c и J_c являются такими практически сравнительно просто вычисляемыми величинами, которые к тому же очень близко связаны с общепризнанными системами мультипольных моментов для АП САС 4-пространств [3-4]. Поэтому для краткости будем трактовать и M_c и J_c как 2^ℓ -польные моменты массы и импульсного момента источника АП САС вак. гравитационных полей, соответственно. Как нами доказано [1-2], в октупольном приближении ($\ell \leq 3$) величины M_c и J_c точно совпадают с моментами Хансена. С помощью преобразования Элерса $\xi' = e^{i\varphi} \xi$, $\text{так что } -M_0'' J_0$ всегда можно обеспечить выполнение условия $J_0' = 0$, т.е. отсутствие вихревого гравитационного монополя ("члена НУТ").

Рассмотрим теперь общий случай АП САС вак. метрик как решений ЭУ, заданных с помощью формул (2)-(4) в ОБШШ-координатах r, ψ, φ, t . С учетом взаимоотношений между комплексными потенциалами Эрнста ξ и $\bar{\xi}$, а также между (R, θ) и (r, ψ) , можем после прямых выкладок получить в ОБШШ-координатах мультипольные разложения для $\bar{\xi}$, а затем для λ, A, k в (1). При выполнении условия $J_0' = 0$ будем иметь

$$\bar{\xi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n r^{-n}, \quad \lambda = \text{Re } \bar{\xi}, \quad (7)$$

$$A = y^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n}, \quad k = y^2 \sum_{n=2}^{\infty} k_n r^{-n}, \quad (8)$$

где в октупольном приближении

$$\bar{\xi}_{(1)} = -2M_0, \quad \bar{\xi}_{(2)} = -2M_1 x + i[-2J_1 x], \quad (9)$$

$$\bar{\xi}_{(3)} = -M_2(3x^2 - 1) - \alpha_0^2 M_0(x^2 - 1) + i[-J_2(3x^2 - 1)], \quad (10)$$

$$\bar{\xi}_{(4)} = -M_3(5x^2 - 3)x - M_0 M_2(3x^2 - 1) - 2J_1^2 x^2 - M_0^2 \alpha_0^2(x^2 - 1) + 2M_1^2 x^2 + M_1(2M_0^2 + 3\alpha_0^2)x + i[-J_3(5x^2 - 3)x - M_0 J_2(3x^2 - 1) - 3J_1 \alpha_0^2 x(x^2 - 1) + 4M_1 J_1 x^2], \quad (11)$$

.....

$$A_{(1)} = 2J_1, \quad A_{(2)} = 3J_2 x + 4M_0 J_1, \quad (12)$$

$$A_{(3)} = J_3(5x^2 - 1) + 4M_0 J_2 x + J_1[8M_0^2 + \alpha_0^2(3x^2 - 1)], \quad (13)$$

.....

$$k_{(2)} = -\frac{1}{2} M_0^2, \quad k_{(3)} = -M_0(2M_1 x + M_0^2), \quad (14)$$

$$k_{(4)} = \frac{1}{4} \{-x^2[15M_2 M_0 + 9(M_1^2 + J_1^2) + 4M_0^4 - 4M_0^2 \alpha_0^2] - 24M_1 M_0^2 x + 3M_2 M_0 + M_1^2 + J_1^2 - 7M_0^4 + 2M_0^2 \alpha_0^2\}. \quad (15)$$

.....

На основе сравнения с шварцшильдовским полем параметр μ в (7)–(15) уже выбран равным массе M_0 . Второй коорд. параметр a_0 (или ν) пока остается произвольным. В случае поля Керра a_0 равен удельному импульсному моменту источника a , а для $\{M_i, J_i\}$ имеет место $M_0 = \mu$, $J_1 = -\mu a$, $M_2 = -\mu a^2$, $J_3 = \mu a^3$, $J_0 = M_1 = J_2 = M_3 = a$.

Подчеркнем, что формулы (7)–(15) являются общими для всех классов АП САС вак. решений ЭУ. С использованием конкретных соотношений между моментами Хансена и свободными параметрами определенного решения, сравнительно легко получаемых по $O(1)$ -разложениям $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k R^{-k}$ конкретных функций ξ на верхней полуоси симметрии, можно теперь сравнить между собой на единой основе рассматриваемые мультипольные разложения для любых классов точных АП САС вак. решений ЭУ. Пользование ОБЛШ-координатами является весьма целесообразным, если поставлена задача сравнить произвольный класс САС вак. решений с хорошо известными решениями Шварцшильда и Керра.

Исходя из формул (1)–(4) и (7)–(15) можно далее получить общие мультипольные разложения в ОБЛШ-координатах для различных других физико-геометрических характеристик АП САС вак. метрик (см., напр., [5]), а также для интегралов геодезического движения в этих 4-пространствах [6]. Дополнительно отметим, что при вычислении всех упомянутых мультипольных разложений по данному нами методу (в приближении, представляющем интерес) с успехом можно пользоваться системой аналитических вычислений REDUCE 3.1 на ЭВМ [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель А.А. // Гравитация и электромагнетизм - 1986. Минск: Университетское, 1987. С.54.
2. Koppel A. // Abstracts of Contr.Pap.11th Intern.Conf.on Gen.Rel.and Grav. Stockholm, 1986. Vol.1. P.174.
3. Hansen R.O. // J.Math.Phys. 1974. Vol.15. P.46.
4. Thorne K.S. // Rev.Mod.Phys. 1980. Vol.52. P.299.
5. Коппель А.А., Лембер Т.Р. // Тартуск.ун-т. Тарту, 1987. 31 с. Рукопись деп. ЭстНИИИТ 27.03.87, № 5-3с87.
6. Коппель А.А., Лембер Т.Р. // Тезисы докл. II Всес.симп. "Движение тел в рел.теории грав." Вильнюс, 1986. С.43.
7. Hearn A.C. REDUCE USER'S MANUAL. Version 3.1. Santa Monica: The Rand Corporation, 1984.

СВОЙСТВА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ И ИХ ПОГРУЖЕНИЕ В E_6 .

В.Р.Кайгородов

Казанский государственный университет (Казань)

1. В теории гравитационных полей исследование структуры пространственно-временных многообразий разделяется на 2 этапа. Первый состоит в установлении локальных законов (дифференциальных уравнений на многообразии), которым удовлетворяют физические поля. Второй этап состоит в изучении глобальных свойств решений таких уравнений.

2. Поля гравитационного излучения в ОТО предлагается рассматривать как волны кривизны, т.е. тензор Римана подчиняется уравнениям, описывающим как линейные так и нелинейные колебательные процессы: $\nabla \Gamma = \varphi \otimes \Gamma + \Psi \otimes \Gamma^2$, где $\Gamma = C + i C^*$, C, C^* - соответственно тензор Вейля конформной кривизны и дуальный к нему. В пустоте ($\nabla C = 0$), когда $C \equiv R$, решения указанных уравнений определяют пространственно-временное многообразие с метрикой $g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1$, $g_{24} = 2 \int A(x^2, x^3, x^4) dx^3$, $g_{44} = 2 B x^1 + 2 \Phi$, где $f = A + i B$ - аналитическая функция на комплексной плоскости $\{x^2, x^3\}$, а функция Φ удовлетворяет уравнению Пуассона $\partial_{22} \Phi + \partial_{33} \Phi = 4 (\partial_2 B) \int A dx^3 + 2 B \int (\partial_2 A) dx^3 + 2 \int (\partial_{24} A) dx^3 - 2 A^2$. При $A \equiv 0$, $B \equiv 0$ волны линейные и относятся к типу \mathcal{N} Петрова, при $(\partial_2 B)^2 + (\partial_3 B)^2 \neq 0$ волны нелинейные и относятся к типу III Петрова. Указанные многообразия суть обобщения симметрических многообразий. В частности, при $A = 0$, $B = 0$, $\Phi = x^p x^q \left(\sum_{j=1}^s m_{pq}^j (x^4)^{s-j} \right)$ ($p, q = 2, 3$) имеем ξ -симметрическое пространство ($\nabla \nabla \dots \nabla R = 0$), не сводимое к симметрическому ($\nabla R = 0$).

3. В работе Гаврилова С.П. (Геодезическая полнота и канонические формы плосковолновых метрик. Сб. "Грав. и теор. относит.", вып. 23. Изд-во КГУ, Казань, 1986) показано, что в классе указанных выше многообразий содержатся многообразия (\mathcal{U}, g) , состоящие из открытого множества $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{I}$ с индефинитной метрикой g , и они геодезически полны тогда и только тогда, когда $\mathbb{I} \equiv \mathbb{R}$. Их метрика в этом

случае не расширяема.

4. Многообразия линейных волн допускают погружение в псевдоевклидово шестимерное пространство E_6 с сигнатурой $(- - - + - +)$. Функции погружения имеют вид:

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + (\Phi - 1)x^4), \quad z^2 = x^2, \quad z^3 = x^3, \quad z^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + (\Phi + 1)x^4), \\ z^5 &= \frac{1}{2}(\Phi + x^4{}^2), \quad z^6 = \frac{1}{2}(\Phi - x^4{}^2). \end{aligned}$$

Независимо от выбора точки (x^1, x^2, x^3, x^4) и вида функции Φ (класса C^2) минор четвертого порядка (в левом верхнем углу) для дифференциала отображения $M \rightarrow E_6$ равен $\sqrt{2}$ и, следовательно, имеем погружение в целом. Можно показать, что многообразия, реализуемые как 4-поверхности в E_6 представляют собой минимальные пленки в данном псевдоевклидовом пространстве.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НА ИЗОТРОПНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДУЩЕГО

А. И. Нестеров

Институт физики СО АН СССР (Красноярск)

В работе используется формализм Ньюмена-Пенроуза в формулировке [1,2]. В стандартных обозначениях имеем следующие определяющие соотношения:

$$l \cdot n = -m \cdot \bar{m} = 1, \\ g_{\alpha\beta} = 2[l_{(\alpha} n_{\beta)} - m_{(\alpha} \bar{m}_{\beta)}], \quad D = l^{\alpha} \partial / \partial x^{\alpha},$$

$$\delta = m^{\alpha} \partial / \partial x^{\alpha}, \quad \Delta = n^{\alpha} \partial / \partial x^{\alpha},$$

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = \kappa = 0, \quad \rho = \bar{\rho}, \quad \tau = \bar{\tau} = \bar{\alpha} + \beta.$$

Группа асимптотических симметрий определяется из решения приближенных уравнений Киллинга $\oint_{\Sigma} g_{\mu\nu} = O(\tau^{-n})$, где показатель n зависит от выбора компонент. Будем предполагать, что асимптотический вектор Киллинга, касательный к изотропной бесконечности будущего (\mathcal{I}^+), распространяется "внутрь" в соответствии с уравнением девиации геодезических

$$\nabla_l^2 \xi + R(\xi, l) l = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$l^{\mu} l^{\nu} \oint_{\Sigma} g_{\mu\nu} |_g = 0, \quad \tau l^{\mu} m^{\nu} \oint_{\Sigma} g_{\mu\nu} |_g = 0, \quad (2)$$

$$l^{\mu} n^{\nu} \oint_{\Sigma} g_{\mu\nu} |_g = Q(u, \tau, \tau).$$

Пусть $\xi = A D + B \Delta + C \delta + \bar{C} \bar{\delta}$. С (1,2) совместны приближенные уравнения Киллинга:

$$(\Delta + \tau + \bar{\tau}) A + \nu C + \bar{\nu} \bar{C} = O(1), \quad (3a)$$

$$\delta A - \Delta C + 2\tau A - \bar{\nu} B + \bar{\lambda} \bar{C} + (\mu + \delta - \bar{\delta}) C = O(1), \quad (3b)$$

$$\bar{\delta} C + \delta \bar{C} - 2\rho A + (\mu + \bar{\rho}) B - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{C} - (\alpha - \beta) C = O(\tau^{-1}), \quad (3b')$$

$$\delta C - \delta A + \bar{\lambda} B + (\bar{\alpha} - \beta) C = O(\tau^{-1}). \quad (3b'')$$

Представляя функции A, B и C в виде

$$A = A_1 \tau + A_0 + A_{-1} \tau^{-1} + \dots,$$

$$B = B_1 z + B_0 + B_{-1} z^{-1} + \dots, \\ C = C_1 z + C_0 + C_{-1} z^{-1} + \dots,$$

и используя асимптотические формулы [2,3], находим

$$B = B_0, \quad B_1 = B_{-1} = \dots = 0, \\ A_1 = -(1/2)(\bar{\partial} C_1 + \partial \bar{C}_1) = -\dot{B} + (\tau^0 + \bar{\tau}^0)B + Q, \\ A_0 = -(1/2)(\bar{\partial} C_0 + \partial \bar{C}_0) - (1/2)(\mu^0 + \bar{\mu}^0)B + (1/2)(\tau^0 \bar{C}_1 + \bar{\tau}^0 C_1), \\ A_{-1} = \text{Re}(B \Psi_2^0 - 2\tau^0 \bar{\partial} B), \quad C_1 = C(\zeta, \bar{\zeta}), \\ C_0 = -\partial B + \epsilon^0 \bar{C}_1, \quad C_{-1} = B \tau^0,$$

где ϵ^0 - асимптотический сдвиг, $\cdot := \partial/\partial u$. Все соотношения записаны в системе координат Бонди. Система уравнений (I-3), если рассматривать $\{Zg\}$ в более высоких порядках, чем это сделано выше, в общем случае решения не имеет.

Основная идея выделения "группы" Лоренца из бесконечно-параметрической группы асимптотических симметрий заключается в том, чтобы наложить дополнительные связи на функции B и C_1 , определяющие асимптотический вектор Киллинга

$$\xi(\phi) = B \partial/\partial u + C_1 \bar{\partial}^0 + \bar{C}_1 \partial^0.$$

Перепишем уравнение $\{Zg\}$ в виде

$$\delta C - \epsilon A + \bar{\lambda} B + (\alpha - \beta) C = X,$$

где X - неизвестная функция, $X = X_{-1} z^{-1} + X_{-2} z^{-2} + \dots$. В приближении τ^0 и $\bar{\tau}^{-1}$, после исключения C_0 и A_1 , получаем

$$\partial C_1 = 0, \quad (4)$$

$$\partial^2 B + \partial F - (\epsilon^0/2)(3 \partial \bar{C}_1 - \bar{\partial} C_1) - C_1 \bar{\partial} \epsilon^0 - \bar{C}_1 \partial \epsilon^0 = B \bar{\lambda}^0 \quad (5)$$

где положено $X_{-1} := \partial F$ функция B , удовлетворяющая (5), имеет следующий вид:

$$B = B_0 + \partial \eta \bar{C}_1 + \bar{\partial} \bar{\eta} C_1 + \frac{u-\eta}{2} \partial \bar{C}_1 + \frac{u-\bar{\eta}}{2} \bar{\partial} C_1, \quad (6)$$

где $\partial C_1 = 0$, а B , и η находятся из дифференциальных уравнений:

$$\partial^2 B_0 = 0, \quad (7)$$

$$\partial^3 \eta + 3 \bar{\lambda}^0 \partial \eta + (\eta - u) \partial^2 \bar{\lambda}^0 - \partial \epsilon^0 = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7,8) выделяют из группы асимптотических симметрий квазигруппу Пуанкаре, которая при отсутствии на \mathcal{S} излучения изоморфна группе Пуанкаре [3].

Вычислим интегралы зацепления [4], предполагая, что $\xi(\mathcal{S})$ распространяется в соответствии с (I). Координатно-независимое выражение имеет вид [3]:

$$L_\epsilon = -\frac{1}{4\pi} \text{Re} \oint [B(\Psi_2^0 + \epsilon^0 \lambda^0 - \partial^2 \bar{\epsilon}^0) + C_1(2\Psi_1^0 + 2\epsilon^0 \partial \bar{\epsilon}^0 + \partial(\epsilon^0 \bar{\epsilon}^0))] d\Omega. \quad (9)$$

Несмотря на внешнее сходство (9) с интегральными величинами Тамбурино и Виникура [4], есть принципиальное отличие. Оно заключается в том, что в (9) функции B и C_1 подчиняются дифференциальным уравнениям (4,5). Интегральный 4-импульс системы равен

$$P_i = -\frac{1}{4\pi} \text{Re} \oint \ell_i (\Psi_2^0 + \epsilon^0 \lambda^0 - \partial^2 \bar{\epsilon}^0) d\Omega,$$

где $\partial^2 \ell_i = 0$. Потери энергии-импульса за счет излучения определяются стандартной формулой Бонди:

$$\dot{P}_i = -\frac{1}{4\pi} \oint \ell_i |\dot{\lambda}^0|^2 d\Omega.$$

Момент импульса равен

$$M_A = -\frac{1}{4\pi} \text{Re} \oint \bar{\ell}_A \dot{\gamma} d\Omega,$$

где $\partial \ell_A = 0$, $\dot{\gamma} = 2\Psi_1^0 + 2\epsilon^0 \partial \bar{\epsilon}^0 + \partial(\epsilon^0 \bar{\epsilon}^0) + 3\partial\eta(\Psi_2^0 + \epsilon^0 \lambda^0 - \partial^2 \bar{\epsilon}^0) + (\eta - u)(\partial\Psi_2^0 + \partial(\epsilon^0 \lambda^0) - \partial^3 \bar{\epsilon}^0)$.
Отсюда

$$\dot{M}_A = -\frac{1}{4\pi} \text{Re} \oint \bar{\ell}_A \dot{\gamma} d\Omega.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. I. М.: Мир, 1987.
2. Prior C.R. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1977. Vol. A354. P. 379.
3. Нестеров А.И. // Пр. №461Ф, ИФ СОАН СССР, Красноярск, 1987.
4. Tamburino L.A., Winicour J.H. // Phys. Rev. 1966. Vol. 150. P. 1059.

О ПРИВИЛЕГИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

В.С.Митковский, А.В.Шаповалов

ТГУ (Томск)

При исследовании задачи о классификации пространств Эйнштейна: $\hat{R}_{ij} = \lambda \hat{g}_{ij}$ размерности 4 и сигнатуры ± 2 , допускающих в уравнении эйконала: $\hat{g}^{ij} A_{,i} A_{,j} = 0$ полное разделение переменных вида: $A = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n x^n + \sum_{a=1}^3 \omega_a(x^4, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_n, \alpha_a)$ - const в некоторой /привилегированной/ системе координат (X) , выясняется, что существует весьма многочисленный класс метрик \hat{g}_{ij} конформно-плоских пространств: $\hat{C}^i_{jkl} = 0$, удовлетворяющих условию рассматриваемой задачи, но не позволяющих полностью разделить переменные в уравнении Гамильтона-Якоби: $\hat{g}^{ij} A_{,i} A_{,j} = \pm m_0^2$, и следовательно, отличных от штеккелевых пространств вакуума типа (N, N') / $N = 0, 3 \geq N' = 0, 1$ /.

Указанные конформно-плоские пространства Эйнштейна с метрикой $\hat{g}_{ij} = \rho g_{ij}$ определяются системой уравнений:

$$C^i_{jkl} = 0, \quad R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij}, \quad (I)$$

$$T_{ij} = -\lambda \rho g_{ij} - \frac{3}{2} \rho^{-2} (\rho_{,i} \rho_{,j} - \frac{1}{2} g^{kl} \rho_{,k} \rho_{,l} g_{ij}) + \\ + \rho^{-1} (\rho_{,i;j} - g^{kl} \rho_{,k;l} g_{ij}),$$

где g^{ij} - метрический тензор пространства Штеккеля типа (N, N') . Эта система совместна по отношению к конформному множителю ρ с максимальным произволом в решении, так как условия интегрируемости уравнений Эйнштейна: $C^i_{jkl} \rho_{,i} / 2\rho = -C^i_{jkl;i}$ в данном случае выполняются тождественно при любых ρ /в силу нулевого значения тензора конформной кривизны/.

В качестве конкретного примера приведем единственное решение системы (I) для класса аксиально-симметричных стационарных пространств Эйнштейна, конформных пространствам Штеккеля типа $(2,0)$ /но не типа $(2,0) \cap (1,1)$, $(2,0) \cap (1,0)$, $(2,0) \cap (3,0)$ /:

$$\frac{\lambda}{3} = -\frac{1}{8} (b^2 + c^2) \sqrt{1-d^2}; \quad b, c, 0 \leq d < 1, e = \text{const};$$

$$g^{ij} = (b^2 \sqrt{H} + c^2 / \sqrt{H} + 2bc) \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{j^2 + \delta^2}} \begin{vmatrix} j & \delta \\ \delta & -j \end{vmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_2 = \sin x^2 + d, \quad \varepsilon_3 = \sin x^3 - d;$$

$$j = \sin(x^2 + e) + \sin(x^3 + e), \quad \delta = \cos(x^2 + e) + \cos(x^3 + e);$$

$$H = \frac{\sqrt{1-d^2} (tg \frac{x^2}{2} + tg \frac{x^3}{2}) + (d - d tg \frac{x^2}{2} tg \frac{x^3}{2} + tg \frac{x^2}{2} - tg \frac{x^3}{2})}{\sqrt{1-d^2} (tg \frac{x^2}{2} + tg \frac{x^3}{2}) - (d - d tg \frac{x^2}{2} tg \frac{x^3}{2} + tg \frac{x^2}{2} - tg \frac{x^3}{2})}$$

Метрика (2) не может принадлежать пространству Минковского / $\lambda \neq 0$ / и при $b = 0$ или $c = 0$ относится к конформно-плоскому штеккелеву пространству вакуума типа (2.0) [1].

Если $\lambda = 0$, то соотношения (1) позволяют указать все привилегированные системы координат (X) плоского пространства-времени, в которых уравнение эйконала интегрируется методом полного разделения переменных. Например, из равенств (1) для метрики $g_{ij}(x^2, x^3)$ пространства Штеккеля типа (2.0) с нулевой скалярной кривизной / $R = 0$ /, а также при условии, что конформный множитель $\rho(x^1, x^2, x^3)$ содержит только одну итно-рируемую переменную x^1 , эти системы координат генерируются двумя волновыми решениями /в случае, когда $\lambda = 0$ /:

$$\frac{\lambda}{3} = -b^2 + 2cd; \quad b, c, d, e = \text{const};$$

$$g^{ij} = \frac{[F(x^1) + \Psi(x^2, x^3)]^2}{\Delta} g^{ij}; \quad g^{ij} = \begin{vmatrix} g^{00} & \\ & \Delta \\ & & -1 \end{vmatrix}; \quad (3)$$

$$I. F = bx^1, \quad \Psi = -\frac{d}{4} \Delta^2 + c(x^2 - x^3), \quad g^{00} = \Delta, \quad \Delta = x^2 + x^3;$$

$$II. F = \frac{c}{2}(x^1)^2 + bx^1 + d, \quad \Psi = e \exp(\frac{x^2}{2}) \times \exp(-\frac{x^3}{2}) +$$

$$+ 2c(\delta_2 - \delta_3), \quad g^{00} = \varepsilon \Delta / \delta_2 \delta_3, \quad \Delta = \delta_2 + \delta_3,$$

$$\delta_2 = \exp x^2, \quad \delta_3 = \varepsilon \exp(-x^3), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

При $\Psi = 0$ метрики (3) принадлежат штеккелевым пространствам вакуума типа (1.0) с постоянной кривизной [1].

ЛИТЕРАТУРА

- I. Багров В.Г., Обухов В.В., Шаповалов А.В. // Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. Вып. 23. С. 10-30.

РЕШЕНИЯ КЕРРА-НЬЮМЕНА-ЭРНСТА И ИХ ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

А.Н.Алиев

Шемахинская астрофизическая обсерватория (г. Шемаха)

Д.В.Гальцов

Московский государственный университет (г. Москва)

В последнее время уделялось много внимания обсуждению точных решений системы уравнений Эйнштейна-Максвелла, описывающих так называемые "замагниченные" черные дыры. Такие решения представляют интерес в связи с астрофизическими моделями ядер галактик и квазаров, в которых используется представление о черной дыре Керра, погруженной во внешнее крупномасштабное магнитное поле, которое в хорошем приближении можно считать однородным и постоянным. "Замагниченные" решения получаются с помощью преобразования Харрисона из решения Керра-Ньюмена [1-2], они не являются уже асимптотически плоскими, однако по-прежнему обладают несингулярным горизонтом событий и в своем классе являются единственными [3]. Характерным масштабом напряженности магнитного поля, при котором необходимо учитывать влияние поля на метрику пространства-времени является величина $B_M = I/M = 2.4 \cdot 10^{19} \text{ МГс} / \text{М} (\text{Гс})$. В случае, если напряженность магнитного поля в окрестности черной дыры значительно меньше этой величины, существует промежуточная асимптотическая область $M \ll r \ll B^{-1}$, в которой пространство-время является плоским, а магнитное поле постоянным и однородным, направленным вдоль полярной оси (используется геометрическая система единиц $G = c = 1$). Однако при попытке истолкования точных "замагниченных" решений с учетом нелинейных эффектов возникают трудности во-первых в связи с неплоским характером метрики на бесконечности, во-вторых с возникновением конических особенностей при "наивном" применении преобразования Харрисона к метрике Керра-Ньюмена. На существование конических особенностей в оригинальном решении Керра-Ньюмена-Эрнста [2] было указано Хискоком [3], хотя в его работе имеются некоторые неточности. Присутствие конических особенностей фактически означает, что рассматриваемое решение не является решением уравнений электровакуума всюду, но соответствует наличию дополнительного материального источника в виде син-

гулярной струны. Более того, как будет показано ниже, такая струна обладает отрицательной плотностью энергии, поэтому решение Керра-Ньюмена-Эрнста в его первоначальной форме не может быть истолковано даже с привлечением представления о космических струнах, метрика которых с хорошей точностью аппроксимируется метрикой Минковского с коническими точками вдоль струны.

Покажем, что возникновение конических особенностей является общим свойством преобразования Харрисона, и его следует дополнить правилом, с помощью которого в результирующих решениях можно избавиться от конических точек. Рассмотрим некоторое стационарное аксиально-симметричное пространство-время

$$ds^2 = f(d\varphi - \omega dt)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(dp^2 + dz^2) + \rho^2 dt^2], \quad (1)$$

где f , ω и γ — вещественные функции двух переменных ρ и z . Преобразование Харрисона состоит в применении к потенциалам Эрнста $\Phi = A_\varphi + iB_\varphi$ и $\mathcal{E} = f - i\psi$ (где A_φ — компонента 4-потенциала, генерирующего максвелловский тензор, а B_φ — соответствующая компонента потенциала, генерирующего дуальный тензор электромагнитного поля, ψ — твист-потенциал) следующей операции

$$\mathcal{E} \rightarrow \Lambda^{-1} \mathcal{E}, \quad \Phi \rightarrow (\Phi - B\mathcal{E}/2)\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 - B\Phi + B^2\mathcal{E}/4, \quad (2)$$

где B — вещественный постоянный параметр, интерпретируемый в рассматриваемом контексте как напряженность постоянного и однородного внешнего магнитного поля. Преобразованное значение метрической функции f равно

$$f' = |\Lambda|^{-2} f \quad (3)$$

в то время как функция γ остается неизменной. Из (1) ясно, что при отсутствии конических особенностей в исходном решении, т.е. при выполнении условия на оси

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho f^{-1} \exp \gamma) = 1 \quad (4)$$

требование отсутствия конических точек в преобразованном решении означает

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |\Lambda| = 1 \quad (5)$$

В общем случае это условие не выполняется. В частности, оно не имеет места и для решения, полученного в [2]. Именно, подставляя в (3) потенциалы Эрнста решения Керра-Ньюмена [2], находим

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\Lambda|^2 = |\Lambda_0|^2 = (1 + B^2 Q_0^2 / 4)^2 + B^2 (Q_0 + aMB)^2. \quad (6)$$

Соответствующая сингулярная часть тензора энергии-импульса, обязанная своим происхождением коническим особенностям на оси симметрии, будет иметь вид

$$T^0_z = T^z_z = (|\Lambda_0|^2 - 1) (8\pi r |\Lambda_0|^2)^{-1} \delta(r), \quad (7)$$

что можно интерпретировать как бесконечно тонкую прямолинейную космическую струну.

Устранение конической особенности осуществляется домножением азимутальной координаты в преобразованном решении на что приводит к "исправленному" решению Керра-Ньюмена-Эрнста

$$ds^2 = \left(\frac{\Delta}{A} dt^2 - \frac{dz^2}{\Delta} - d\theta^2 \right) \Sigma |\Lambda|^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma |\Lambda|^2} (dy |\Lambda_0|^2 - \omega' dt)^2, \quad (8)$$

причем φ изменяется в стандартных пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Решение (8) приводит к иным соотношениям между параметрами затравочного и преобразованного решений (подробнее см. [4-5]), чем это было найдено в [6], где было использовано нефизическое решение, содержащее сингулярную струну. В частности, площадь поверхности горизонта событий замагниченной дыры

$$S = \oint |g_{\varphi\varphi} g_{\theta\theta}|^{1/2} d\Omega = 4\pi |\Lambda_0|^2 (z_+^2 + a^2); \quad (9)$$

соотношение между затравочным и физическим зарядами есть

$$Q = \frac{1}{2} |\Lambda_0|^2 I_m(\Phi(0) - \Phi(\pi)) = Q_0 + 2aMB - Q_0^3 B^2 / 4 \quad (10)$$

Нетривиальной чертой решения (6) является предсказание "магнитного" увлечения систем отсчета около невращающейся заряженной черной дыры в магнитном поле. Соответствующая угловая скорость вблизи горизонта при $B \ll B_m$ равна $Q_0 B / m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ernst F.J. // Journ. of Math. Phys., 1978, V.17, P.54.
2. Ernst F.J., Wild W.J. // Journ. of Math. Phys., 1976, V.17, P.182.
3. Hiscock W.A. // Journ. of Math. Phys., 1981, V.22, P.1828.
4. Алиев А.Н. Кандидатская диссертация. М.: МГУ, 1983.
5. Гальцов Д.В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М.: МГУ, 1986, 289с.
6. Докучаев В.И. // ЖЭТФ, 1987, Т. 92. С.1921.

КВАЗИКОНИЧЕСКИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В КЛАССЕ МЕТРИК ТОМИМАТСУ-САТО: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Н.Н.Костюкович

Институт физики АН БССР (Минск)

Одним из путей исследования структуры вакуумных решений уравнений гравитационного поля является анализ поведения геодезических, причем наиболее обстоятельно он может быть проведен на основе точных решений соответствующих уравнений движения. Поскольку рассмотрение лишь простейшего типа орбит - круговых, которым часто ограничиваются при анализе решений со сложной структурой метрического тензора $g_{\mu\nu}$, значительно сужает рамки исследования, представляет интерес получение точных решений уравнений геодезических для случая некругового движения. В данной работе на основе общих формул из [1,2], характеризующих геодезическое и негеодезическое движение пробных тел по экваториальным квазиконическим /квазикепперовым/ орбитам в стационарных аксиально-симметричных полях тяготения, предложен и с помощью системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP [3] реализован на ЭВМ алгоритм точного решения уравнений геодезических в классе метрик Томиматсу-Сато [4].

В сферической системе координат Глесса-Ямадзаки однопараметрический класс решений Томиматсу-Сато определяется линейным элементом [5,6]

$$ds^2 = \frac{A_\delta}{B_\delta} (dx^2 - \omega d\varphi)^2 - \frac{B_\delta}{A_\delta} \left[\Delta_2 e^{2x} \left(\frac{dr^2}{\Delta_1} + d\theta^2 \right) + \Delta_1 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (1)$$

где

$$\omega = 2a C_\delta A_\delta^{-1} (1-y^2), \quad e^{2x} = A_\delta P^{-2\delta} (x^2 - y^2)^{-\delta^2}, \quad \Delta_1 = \left(\frac{mP}{\delta} \right)^2 (x^2 - 1), \quad (2)$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \left(\frac{mP}{\delta} \sin \theta \right)^2, \quad x = \frac{\delta}{mP} (r-m), \quad y = \cos \theta, \quad \delta = 1, 2, 3, \dots$$

В экваториальной плоскости / $y = 0$ / функции A_δ , B_δ и C_δ имеют вид

$$A_\delta = \sum_{i=0}^{\delta^2} a_{2i} x^{2i}, \quad B_\delta = \sum_{i=0}^{2\delta^2} b_i x^i, \quad C_\delta = \sum_{i=0}^{2\delta^2-1} c_i x^i, \quad (3)$$

а подстановка $g_{\mu\nu}$ в общие выражения из [1,2] дает для времениподобных геодезических следующее дифференциальное уравнение траектории:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\Delta_1^2 u^4}{\Delta_2 e^{2\delta} A_\delta (h - \omega \varepsilon)^2} \left(\frac{\Delta_1 B_\delta^2 - 4a^2 C_\delta^2}{A_\delta} \varepsilon^2 + 4a C_\delta \varepsilon h - A_\delta h^2 - \Delta_1 B_\delta \right), \quad (4)$$

где $u = r^{-1}$, а ε и h - интегралы движения, генерируемые векторами Киллинга $\xi^\mu = \delta_0^\mu$ и $\eta^\mu = \delta_\varphi^\mu$. Из (1)-(4) следует, что выражение в скобках имеет вид $F(x) = A_\delta^{-1} P_M(x)$, где $P_M(x)$ - полином степени $M = 2(2\delta^2 + 1)$ относительно x . Если же числитель коэффициента при ε^2 делится на A_δ без остатка, т.е.

$$4a^2 C_\delta^2 - \Delta_1 B_\delta^2 = A_\delta E_\delta, \quad E_\delta = \sum_{i=0}^{2(\delta^2+1)} e_i x^i, \quad (5)$$

то $F(x)$ преобразуется в полином $P_N(x)$ степени $N = 2(\delta^2 + 1) < M$, а уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\Delta_1^2 u^{2(1-\delta^2)}}{\Delta_2 e^{2\delta} A_\delta (h - \omega \varepsilon)^2} P_N(u). \quad (6)$$

Как показано в [1,2], выделение из функции $F(u)$ полиномиального множителя вида $P_N(\varepsilon, h, u)$ гарантирует возможность получения точного решения дифференциального уравнения траектории в виде квазиконического сечения

$$u = p^{-1} (1 + e \cos \psi(\varphi)), \quad (7)$$

где e и p - эксцентриситет и фокальный параметр орбиты. Для уравнения (6) соответствующее решение имеет вид

$$x_2^0 - x_1^0 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{e^\delta (A_\delta \omega h - E_\delta \varepsilon)}{\Delta_1 u^{1-\delta^2}} \left(\frac{\Delta_2}{A_\delta R_{N-2}(u)} \right)^{1/2} d\psi, \\ r = p (1 + e \cos \psi(\varphi))^{-1}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{e^{\gamma(h - \omega \varepsilon)}}{\Delta_1 u^{1-\delta^2}} \left(\frac{\Delta_2 A_\delta}{R_{N-2}(u)} \right)^{1/2} d\psi.$$

Полином $R_{N-2}(u)$ определяется равенством

$$P_N(u) = \left(u - \frac{1-e}{\rho}\right) \left(\frac{1+e}{\rho} - u\right) R_{N-2}(u),$$

а его коэффициенты β_i связаны с коэффициентами α_i полинома $P_N(u)$ рекуррентными соотношениями

$$\alpha_i = -\beta_{i-2} + \frac{2}{\rho} \beta_{i-1} - \frac{1-e^2}{\rho^2} \beta_i, \quad i=0,1,\dots,N. \quad (9)$$

Из (9) следует также система двух биквадратных уравнений относительно ε и h , решение которой определяет явную зависимость интегралов движения от параметров орбиты (7).

Отметим, что предложенный алгоритм точного решения уравнений геодезических в классе метрик (I) существенно использует то обстоятельство, что в сферической системе координат Глэсса-Ямадзаки полиномиальный характер функции $F(x)$ не нарушается после перехода от x к переменной $u = r^{-1}$. Последнее не имеет места при использовании сферических координат, используемых Томиматсу и Сато [4].

В качестве примеров рассмотрено приложение описанного алгоритма к метрикам Томиматсу-Сато для значений параметра $\delta = 1, 2, 3$. Все вычисления, связанные с проверкой условия (5), установлением явного вида уравнения (6) и квадратур (8) проведены на ЭВМ ЕС-1060 с помощью программы, написанной на языке системы аналитических вычислений SCHOONSCHIP.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kostyukovich N.N.// Abstracts of Contributed Papers. 9th International Conference on General Relativity and Gravitation, Jena: FSU, 1980. P.180.
2. Kostyukovich N.N.// Preprint IPT/10/85. Warsaw: IFT UW, 1985.
3. Strubbe H.// Comput. Phys. Commun. 1974. Vol.8. P.1.
4. Tomimatsu A., Sato H.// Progr. Theor. Phys. 1973. Vol. 50. P.95.
5. Glass E.N.// Phys. Rev. D. 1973. Vol.7. P.3127.
6. Yamazaki M.// J. Math. Phys. 1978. Vol.19. P.1376.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ГРАВИТАЦИИ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ ФОТОНОВ

Р.С. Сингатуллин

Башкирский государственный педагогический институт (Уфа)

1. Развивается метод для решения уравнений поля, который заключается в подключении к уравнениям Эйнштейна условий допуска частных интегралов движения пробных частиц в гравитационном поле. Наличие информации динамического характера расширяет систему уравнений Эйнштейна и тогда возникают новые возможности для их интегрирования. Продемонстрируем это на следующем примере. Будем искать осе-симметрические метрики

$$ds^2 = e^{2\phi} dx^2 - e^{2(\psi-\phi)} (d\rho^2 + dz^2) - \rho^2 e^{-2\phi} d\alpha^2,$$

где ϕ, ψ - функции от ρ и z в координатах Вейля (ρ, α, z) , удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна в вакууме. Достаточно полный обзор о них можно найти в [1]. Пусть частные интегралы уравнения изотропных геодезических линий имеют вид

$$\psi_1 = \alpha = C_1, \quad \psi_2 = f(\rho, z) = C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Решая обратную задачу динамики фотонов, можно получить [2] формулы

$$\psi = L + 2\phi, \quad F^2(\psi) = \frac{\exp(2L)}{v_\rho^2 + v_z^2},$$

где $F^2(\psi)$ - произвольная, v - левая часть решения уравнения

$$f_z d\rho - f_\rho dz = 0 \rightarrow \sigma = \text{const}.$$

Теперь решаемая система уравнений поля с учётом заданных траекторий фотонов будет такой

$$v_\rho = \rho(\phi_\rho^2 - \phi_z^2), \quad v_z = 2\rho\phi_\rho\phi_z, \quad (1)$$

$$\phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\phi_\rho + \phi_{zz} = 0, \quad (2)$$

$$\psi = L + 2\phi, \quad F^2(\psi) = (v_\rho^2 + v_z^2)^{-1} \exp(2L). \quad (3), (4)$$

Уравнение (2) является условием интегрируемости системы (1), и, ввиду его линейности и изученности, оно в гравитации обычно используется для получения различных решений уравнений $R_{\alpha\beta} = 0$. Вместо такого способа мы выберем другой путь.

При $1-\varrho \Phi_p \neq 0$ из (I) и (3) получим равенства

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \frac{1}{\varrho} \pm \left[\frac{1}{2\varrho} \left(L_p + \frac{1}{\varrho} + \sqrt{\left(L_p + \frac{1}{\varrho} \right)^2 + L_z^2} \right) \right]^{1/2}, \\ \Phi_z &= \pm \frac{L_z}{2} \left[\frac{\varrho}{2} \left(L_p + \frac{1}{\varrho} + \sqrt{\left(L_p + \frac{1}{\varrho} \right)^2 + L_z^2} \right) \right]^{-1/2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Условием интегрируемости такой системы является уравнение

$$l_{pp} + \frac{1}{\varrho} \sqrt{l_p^2 + l_z^2} + l_{zz} = 0, \text{ где } l = L + l_n \varrho, \quad (6)$$

которое мы назовём квазилапласовским. Задача свелась к проблеме решения квазилапласовского уравнения, удовлетворяющего динамическому условию (4).

2. Приведём решение этой проблемы в частном случае. Пусть

$$\begin{cases} \psi_1 = \alpha = c_{11} \\ \psi_2 = \frac{1}{2}(\varrho, z) = \varrho_1 - \varrho_2 = \sqrt{(\varrho + a)^2 + z^2} - \sqrt{(\varrho - a)^2 + z^2} = c_2, \end{cases}$$

то есть траектории фотонов - двухпараметрическое семейство гипербол с фокусами на окружности $z=0$, $\varrho=a$. Для таких траекторий имеем из условия (4):

$$l = \beta(v) - \frac{1}{2} l_n (v^2 - u^2) + l_n u,$$

где $v = \varrho_1 - \varrho_2$, $u = \varrho_1 + \varrho_2$; $\beta(v)$ - произвольная функция. Функцию $\beta(v)$ можно определить из квазилапласовского уравнения (6) для функции l . Используя найденное l , можно показать, что

$$L = l - l_n \varrho = l_n \left[b(\varrho_1 - \varrho_2) \varrho^{-1} (\varrho_1 \varrho_2)^{-1/2} \right], \quad b = \text{const.}$$

Тогда правые части системы (5) будут конкретными функциями координат, эту систему удаётся решить и найти функцию Φ :

$$\Phi = \ln(4ad\varrho) \pm \ln \left[(\varrho_1 - \varrho_2)(2a + \sqrt{4a^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2})^{-1} \right],$$

Двум знакам (\pm) отвечают два точных решения из класса метрики Вейля:

$$\begin{aligned}ds^2 = & - \frac{b^2 c^2 (\varrho_1 - \varrho_2)^4}{\varrho_1 \varrho_2 (2a + \sqrt{4a^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2})^2} (d\varrho^2 + dz^2) - \\ & - \frac{(2a + \sqrt{4a^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2})^2}{c^2 (\varrho_1 - \varrho_2)^2} d\alpha^2 + \frac{c^2 \varrho^2 (\varrho_1 - \varrho_2)^2 dx^2}{(2a + \sqrt{4a^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2})^2},\end{aligned}$$

$$ds^2 = - \frac{\tilde{b}^2 \tilde{c}^2 (2a + \sqrt{4a^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2})^2}{\rho_1 \rho_2} (d\rho^2 + dz^2) -$$

$$- \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 d\alpha^2}{c^2 (2a + \sqrt{4a^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2})^2} + dx^2 \cdot \frac{\tilde{b}^2 \tilde{c}^2 (2a + \sqrt{4a^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2})^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2},$$

где a, b, c - параметры, $\rho_1 = \sqrt{(a+\alpha)^2 + z^2}$, $\rho_2 = \sqrt{(a-\alpha)^2 + z^2}$.

3. Новую информацию об источниках найденных полей тяготения можно получить, исходя из допустимых групп движения. В результате анализа уравнений Киллинга для полученных статических осе-симметрических метрик сделан вывод о том, что они не допускают дополнительных симметрий.

4. Решения имеют физическую особенность при $\rho = a, z = 0$. Заметим, что интерпретация метрики, основанная на особенностях самой метрики, может оказаться ошибочной. Курзон, например, решение с $\phi = -m(\rho^2 + z^2)^{-1/2}$ интерпретировал как поле, порождаемое точечной массой m . Впоследствии, исследуя инварианты поля, в работе [3] было показано, что источник этого поля не имеет топологию точки. Известно [4], что в случае вакуума простейший базис поля тяготения составляет система 4^х инвариантов второго порядка. Результаты анализа этих инвариантов применительно к найденным решениям будут даны в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Д., Стефани Х., МакКаллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
2. Сингатуллин Р.С. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. II. М.: Атомиздат, 1980, С. 66.
3. Gautreau R. // Phys. Lett. A. 1969. Vol. 28. P. 606.
4. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966, § 22.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ДЕВИАЦИЯ И МУЛЬТИПОЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИСТОЧНИКА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Е.Д.Мелкумова

Научно-исследовательский институт ядерной физики
при Московском государственном университете им.

М.В.Ломоносова,

В.И.Хлебников

Институт проблем механики АН СССР
(Москва)

Релятивистские физико-механические эксперименты на спутниках, свободных от сноса, привлекают в настоящее время всё возрастающее внимание как теоретиков, так и специалистов в области практической космонавтики. Ярким свидетельством тому служит наличие ряда фундаментальных научных программ в крупнейших релятивистских центрах мира, среди которых выделяется весьма дорогостоящая программа Стэнфордского университета (США) по реализации гироскопического эксперимента Шаффа [1]. Значение указанного эксперимента, предложенного в качестве "теста" для верификации эйнштейновской общей теории относительности в слабых стационарных (не статических!) гравитационных полях, не исчерпывается возможностью проверки той или иной метрической теории тяготения. В равной мере это замечание относится ко всей области теоретических исследований, связанных с прецизионными физико-механическими экспериментами на борту искусственных спутников Земли. Новое содержание этой старой области исследований определяется её неразрывной связью с перспективно ориентированными разработками по космической гравиметрии. Дело в том, что характер движения пробного тела относительно кабины стабилизированного космического летательного аппарата позволяет судить о приливных силах на орбите и тем самым о тонкой структуре отвечающего этим силам внешнего гравитационного поля.

В настоящем докладе сформулированная выше программа теоретических исследований обсуждается на примере эффекта Широкова [2], получившего дополнительное освещение в монографиях [3] и [4]. Мы рассматриваем гравитационное

поле абстрактного источника, ньютоновский потенциал которого в надлежащим образом ориентированной сферической системе координат задаётся выражением

$$U = \frac{M}{\rho} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2m} J_{2m} P_{2m}(\cos \theta) \right], \quad (1)$$

где $P_{2m}(\cos \theta)$ - чётные полиномы Лежандра:

$$P_{2m}(x) \equiv \frac{1}{2^{2m} (2m)!} \cdot \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^{2m}; \quad x \equiv \cos \theta,$$

а M - масса источника, выраженная в единицах размерности длины ($M \equiv GM_{\text{источника}} / c^2$).

Метрика пространства-времени, отвечающего потенциалу (1), в постньютоновском приближении имеет вид [5]:

$$ds^2 = (1 - 2U + 2\beta U^2) c^2 dt^2 - (1 + 2\gamma U) [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (2)$$

где β, γ - коэффициенты параметризованного постньютоновского разложения, характеризующие тип применяемой теории гравитации (в общей теории относительности $\beta = \gamma = 1$). Заметим, что мы пользуемся так называемыми изотропными сферическими координатами, отличающимися от шварцшильдовских координат работы [2].

Предполагается, что в спутнике достигнут достаточно высокий уровень компенсации паразитных негравитационных ускорений и положение его центра масс с постньютоновской степенью точности задаётся экваториальной круговой геодезической ($\rho = \text{const} = \rho_0$, $\theta = \text{const} = \pi/2$) в пространстве-времени (2). Для такой геодезической нетривиальные компоненты 4-скорости u^i ($i = 0, 1, 2, 3$) имеют вид:

$$u^0 = 1 + U_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \rho}, \quad (3)$$

$$u^3 = \pm \sqrt{-\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial \rho}} \left[1 + (1 - \beta - \gamma) U_0 - \frac{1}{2} (1 + \gamma) \frac{\partial U_0}{\partial \rho} \rho_0 \right], \quad (4)$$

где $U_0 \equiv U|_{\rho=\rho_0, \theta=\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\partial U_0}{\partial \rho} \equiv \frac{\partial U}{\partial \rho}|_{\rho=\rho_0, \theta=\frac{\pi}{2}}$ [знаки "плюс" или "минус" в формуле (4) отвечают обращению спутника по часовой или против часовой стрелки соответственно, если смотреть в положительном направлении полярной оси]. В качестве примера выпишем одну из величин, подлежащих измерению внутри кабины спутника, свободного от сноса, — круговую частоту колебаний материальной точки в плоскости орбиты:

$$\omega_{||}^2 = - \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho_0} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial \rho} \right) \left[1 + 2 (1 - \beta - \gamma) U_0 - (1 + \gamma) \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \rho} \right] - 2 (2 - \beta + 2\gamma) \left(\frac{\partial U_0}{\partial \rho} \right)^2, \quad (5)$$

где введено обозначение $\frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho^2} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}|_{\rho=\rho_0, \theta=\frac{\pi}{2}}$. Существуют и другие характеристики девиации, которые можно измерить автономным образом в спутнике, свободном от сноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt C.W.F. In: New Frontiers of Physics (ed. by Deaver B.S., Everitt C.W.F., Fairbank J., Michelson P.). New York: W.H. Freeman, 1986.
2. Shirokov M.P. // GRG. 1973. Vol. 4. P.131.
3. Иванюк О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. Минск: Наука и техника, 1979.
4. Владимиров Ю.С. Системы отсчёта в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.

О СОВПАДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДЕВИАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЦИУФОЛИНИ И ХОДЖКИНСОНА

Р.Р.Таммело

Институт физики АН ЭССР (Тарту)

Недавно Циуфолини вывел [1] т.н. обобщенное уравнение девиации геодезических, которое допускает произвольно большую относительную скорость пробных частиц. При немного более общих предположениях было ранее [2] Ходжкинсоном выведено т.н. модифицированное уравнение девиации геодезических. Естественно, возникает вопрос о взаимосвязи уравнений девиации Циуфолини и Ходжкинсона. Мы покажем, что уравнение Циуфолини можно рассматривать как частный случай уравнения Ходжкинсона, как оно и должно быть. Более того, эти уравнения являются частными случаями т.н. формального точного уравнения девиации геодезических Александрова-Пирагаса [3]. Выводы Циуфолини и Ходжкинсона осуществимы при помощи нековариантных разложений. Ниже мы укажем ковариантную схему вывода этих уравнений.

Проведем вычисления с помощью математического аппарата двухточечных тензоров [4]. Пусть буквы $\lambda, \lambda, \mu, \dots$ обозначают тензорные индексы, принадлежащие опорной точке Z , а буквы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ - возмущенной точке X . Рассмотрим в области пространства, где любые две точки можно соединить единственной геодезической, две кривые: опорную $O: z^\lambda = z^\lambda(q)$ и возмущенную $P: x^\alpha = x^\alpha(q)$. Тогда мировая функция $\delta = \delta(z, x)$ и ее ковариантные производные, которые обозначаются тензорными индексами у мировой функции, являются однозначными функциями параметра q . Напомним, что битензор $\eta^\lambda = -\delta^\lambda(z, x)$, называемый геодезическим радиус-вектором, является в точке Z вектором, касательным к геодезической и направленным от Z к X , а его длина S равна геодезическому расстоянию между Z и X . Ниже мы используем в качестве вектора отклонения не вектор η^λ , а непосредственно битензор $\delta^\lambda(z, x)$. Дифференцируя его по общему правилу, мы имеем

$$\dot{\delta}^\lambda = \delta^\lambda_{\lambda} \dot{z}^\lambda + \delta^\lambda_{\alpha} \dot{x}^\alpha \quad (I)$$

Точкой над величиной и символом $\delta/\delta q$ мы обозначим абсолютную производную по параметру q .

При помощи пропагаторов Якоби $H^\alpha_x := \delta^\alpha_x$ и $K^\alpha_x := H^\alpha_\lambda \delta^\lambda_x$ можно из (1) выразить возмущенную скорость как

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha_x \dot{z}^\mu - H^\alpha_x \delta^\mu_x \quad (2)$$

Повторно дифференцируя (1) и подставляя (2), мы получим точное уравнение девиации Александрова-Пирагаса [3] в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}^\mu = & (\delta^\mu_{\mu\nu} + 2\delta^\mu_{\mu\alpha} K^\alpha_\nu + \delta^\mu_{\alpha\beta} K^\alpha_\mu K^\beta_\nu) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu - \\ & - 2(\delta^\mu_{\mu\alpha} H^\alpha_\nu + \delta^\mu_{\alpha\beta} K^\alpha_\mu H^\beta_\nu) \dot{z}^\mu \dot{\delta}^\nu + \\ & + \delta^\mu_{\alpha\beta} H^\alpha_\mu H^\beta_\nu \dot{\delta}^\mu \dot{\delta}^\nu + \delta^\mu_\lambda \ddot{z}^\lambda + \delta^\mu_\alpha \ddot{x}^\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) весьма общее. При его выводе других ограничительных предположений кроме единственности геодезической, соединяющей соответственные точки, не сделано. Расстояние между кривыми \mathcal{O} и \mathcal{P} может быть конечным, они могут быстро расходиться и не быть геодезическими.

Пусть далее \mathcal{O} и \mathcal{P} — произвольно параметризованные геодезические, т.е.

$$\ddot{z}^\mu + p_z \dot{z}^\mu = 0 \quad ; \quad p_z := \frac{1}{2} (\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu)^{-1} \frac{d}{dq} (\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu), \quad (4)$$

$$\ddot{x}^\alpha + p_x \dot{x}^\alpha = 0 \quad ; \quad p_x := \frac{1}{2} (\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha)^{-1} \frac{d}{dq} (\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha). \quad (5)$$

Тогда

$$\delta^\mu_\lambda \ddot{z}^\lambda + \delta^\mu_\alpha \ddot{x}^\alpha = (p_z - p_x) \delta^\mu_\lambda \dot{z}^\lambda + p_x \dot{\delta}^\mu_x. \quad (6)$$

Предположим далее, что $\delta^\mu_x \sim \delta^\mu_x \sim 0(s)$ малые первого порядка, в то время как $\dot{\delta}^\mu_x$ конечная. То есть кривые \mathcal{O} и \mathcal{P} близкие, но быстро расходятся, их относительная скорость $\dot{\eta}^\mu = -\dot{\delta}^\mu_x$ может быть релятивистской [1,2]. Разлагая теперь уравнение (3) методом ДеВитта-Брига в ковариантный ряд по вектору δ^μ_x , мы имеем

$$\ddot{\delta}^{\mu} = R^{\mu}_{\nu\lambda} \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu} \delta^{\lambda} - 2 R^{\mu}_{\nu\mu\lambda} \dot{z}^{\mu} \dot{\delta}^{\nu} \delta^{\lambda} + \\ + \frac{2}{3} R^{\mu}_{\mu\nu\lambda} \dot{\delta}^{\mu} \dot{\delta}^{\nu} \delta^{\lambda} + (p_z - p_x) \dot{z}^{\mu} + p_x \dot{\delta}^{\mu} + O(s^2), \quad (7)$$

где

$$p_x = [(\dot{z}_x - \dot{\delta}_x)(\dot{z}^x - \dot{\delta}^x)]^{-1} [(\dot{z}_\mu - \dot{\delta}_\mu)(\dot{z}^\mu - \dot{\delta}^\mu) + \\ + R_{\mu\lambda\nu\tau} \dot{z}^\mu \dot{z}^\tau \dot{\delta}^\nu \delta^\lambda + \frac{2}{3} R_{x\mu\nu\lambda} \dot{z}^\mu \dot{\delta}^\mu \dot{\delta}^\nu \delta^\lambda] + O(s^2). \quad (8)$$

Считая параметр q вдоль O каноническим $p_z = \dot{z}_x \dot{z}^x = 0$, и предполагая, что вектор отклонения ортогонален к опорной линии $\dot{z}_\mu \delta^\mu = 0$, уравнение (7) принимает вид модифицированного уравнения девиации Ходжкинсона [2, уравнение (2.52)].

Перейдем теперь к выводу уравнения Циуфolini. Сокращая выражение (2) оператором параллельного переноса \tilde{g}^{μ}_x и разлагая по методу ДеВитта-Брига, мы получим

$$D^{\mu} := \tilde{g}^{\mu}_x \ddot{x}^x - \dot{z}^{\mu} = \\ = -\dot{\delta}^{\mu} + \frac{1}{2} R^{\mu}_{\lambda\nu\mu} \dot{z}^{\lambda} \delta^{\nu} - \frac{1}{6} R^{\mu}_{\lambda\mu\nu} \dot{\delta}^{\lambda} \delta^{\nu} + O(s^2). \quad (9)$$

Здесь мы сохранили квадратичные по δ^{μ} члены, так как при дифференцировании малая величина δ^{μ} переходит в конечную величину $\dot{\delta}^{\mu}$. Дифференцируя последнее выражение и подставляя уравнения (7) и (9), мы имеем

$$D^{\mu} = R^{\mu}_{\mu\nu\lambda} \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu} \delta^{\lambda} + R^{\mu}_{\nu\mu\lambda} \dot{z}^{\mu} D^{\nu} \delta^{\lambda} + \\ + \frac{1}{2} R^{\mu}_{\mu\nu\lambda} D^{\mu} D^{\nu} \delta^{\lambda} + \frac{1}{2} R^{\mu}_{\mu\nu\lambda} \dot{z}^{\mu} D^{\nu} \delta^{\lambda} + \\ + (p_z - p_x) \dot{z}^{\mu} + p_x \dot{\delta}^{\mu} + O(s). \quad (10)$$

Считая, что геодезические O и P параметризованы канонически, т.е. $p_z = p_x = 0$, уравнение (10) принимает вид обобщенного уравнения девиации геодезических Циуфolini [1, уравнение (14)].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ciufolini F.C.// Phys. Rev. 1986. Vol. 15. P. 46.
2. Hodgkinson D.E.// Gen. Rel. Grav. 1972. Vol. 3. P. 351.
3. Александров А.Н., Пирагас К.А.// ТМФ, Т.38. С.71.
4. Dewitt B.S., Brehme R.W.// Ann. Phys. (USA). 1960. Vol. 9. P. 220.

ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ В ПОЛЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Э.А.Весман, Р.Р.Таммело

Институт физики АН ЭССР (Тарту)

Изучение отклонения мировых линий в искривленном пространстве вызывает многогранный интерес, в том числе в связи с анализом физического содержания приближенных и точных решений уравнений гравитационного поля. При этом обычно ограничиваются линейным по вектору отклонения приближением, считая, что высшие члены дают только малые поправки. Однако в некоторых физически интересных случаях симметрия пробной системы и фонового поля могут оказаться таковыми, что последнее допущение не верно. Здесь мы приведем пример, где доминирующий вклад дают квадратичные по вектору отклонения приливные силы, хотя и линейные приливные силы присутствуют. Именно, мы рассмотрим колебания стержня под воздействием гравитационных волн, выбирая его длину так, что имеет место резонанс для первой изгибной моды, возбуждаемой квадратичной приливной силой.

Пусть наша пробная система состоит из сплошного стержня с равновесной длиной l и радиусом R и из опорного пробного тела большой массы. Прикрепляя один конец стержня к опорному пробному телу, мы обеспечим геодезичность движения этого конца. Пусть до прихода гравитационной волны вдоль оси x^1 стержень направлен по оси x^2 . Гравитационная волна обуславливает в стержне наряду с поперечными приливными силами типа Пирани-Вебера, $T^{\hat{2}} = c^2 R_{\hat{0}\hat{0}\hat{2}\hat{2}} \tau^{\hat{2}}$, также продольные приливные силы $L^{\hat{1}} = -\frac{c^2}{2} R_{\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}} \tau^{\hat{2}} \tau^{\hat{2}} - 2c R_{\hat{1}\hat{0}\hat{2}\hat{0}} \tau^{\hat{0}} \tau^{\hat{2}}$ [1-4], где c - скорость света, $\tau^{\hat{a}}$ - вектор отклонения элемента массы и точкой над символом обозначено дифференцирование по времени. Поперечные приливные силы вызывают Веберовские колебания вдоль оси стержня, а квадратичные по вектору отклонения продольные приливные силы - изгибные колебания стержня. Пусть гравитационная волна линейно поляризована, т.е. $R_{\hat{0}\hat{2}\hat{2}\hat{0}} = 0$, и слаба. Неисчезающие компоненты тензора кривизны перепишем в виде $R_{\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}} = c^{-2} \sigma_+ f(t)$. Тогда единственными неисчезающими компонентами приливных сил являются

$$T^{\hat{2}} = f_3 f(t), \quad L^{\hat{1}} = \frac{x^{\hat{2}}}{2c} \dot{f}(t).$$

где $l_g = x^2 \alpha_+$ и $x^{\hat{2}}$ - равновесный радиусвектор элемента массы.

При сделанных предположениях изгибные колебания стержня $x^{\hat{1}} = \xi(x^{\hat{2}}, t)$, вызванные продольной приливной силой, описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial t^2} + \rho^2 \frac{\partial^4 \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial (x^{\hat{2}})^4} + \frac{1}{\tau_n} \frac{\partial \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial t} = \frac{l_g}{l_c} x^{\hat{2}} \dot{f}(t),$$

с граничными условиями

$$\xi(x^{\hat{2}}, t) \Big|_{x^{\hat{2}}=0} = \frac{\partial \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial x^{\hat{2}}} \Big|_{x^{\hat{2}}=0} = \frac{\partial^2 \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial (x^{\hat{2}})^2} \Big|_{x^{\hat{2}}=l} = \frac{\partial^3 \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial (x^{\hat{2}})^3} \Big|_{x^{\hat{2}}=l} = 0.$$

Здесь $\rho^2 = EJ/\rho S$, а E - модуль Юнга, ρ - плотность, S - поперечное сечение стержня, J - момент инерции поперечного сечения стержня и τ_n - время затухания изгибных мод.

Принимая нулевые начальные условия

$$\xi(x^{\hat{2}}, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \xi(x^{\hat{2}}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

при монохроматической волне $f(t) = \sin \omega_g t$ и $l_g = \frac{1}{2} \omega_g^2 h_+ x^{\hat{2}}$ (здесь ω_g - круговая частота волны и h_+ - амплитуда возмущений метрики в поперечной бесследовой калибровке) мы получим решение

$$\xi(x^{\hat{2}}, t) = e^{-\frac{t}{2\tau_n}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(l^2, \kappa_n l) X_n(x^{\hat{2}}, \kappa_n l) T_n(t),$$

$$\text{где } C_n(l^2, \kappa_n l) = \frac{4l^2}{(\kappa_n l)^3} \frac{\sin \kappa_n l - \frac{\text{th } \kappa_n l}{\text{ch } \kappa_n l}}{\text{ch } \kappa_n l - \frac{2 - \cos^2 \kappa_n l}{\text{ch } \kappa_n l}},$$

$$\kappa_1 l = 1,875, \quad \kappa_2 l = 4,694, \quad \kappa_3 l = 7,854,$$

$$\kappa_n l = \frac{\sqrt{11}}{2} (2n - 1), \quad n = 4, 5, \dots$$

$$X_n(x^{\hat{2}}, \kappa_n l) = (\text{ch } \kappa_n l + \cos \kappa_n l)(\text{ch } \kappa_n x^{\hat{2}} - \cos \kappa_n x^{\hat{2}}) - (\text{sh } \kappa_n l - \sin \kappa_n l)(\text{sh } \kappa_n x^{\hat{2}} - \sin \kappa_n x^{\hat{2}}),$$

$$T_n(t) = \frac{\tau_n \omega_g^3 h_+}{4c \alpha_n} \left\{ e^{\frac{t}{2\tau_n}} \left[\frac{\sin t \omega_g + 2\tau_n (\alpha_n - \omega_g) \cos \omega_g t}{1 + 4\tau_n^2 (\alpha_n - \omega_g)^2} - \frac{\sin t \omega_g - 2\tau_n (\alpha_n + \omega_g) \cos \omega_g t}{1 + 4\tau_n^2 (\alpha_n + \omega_g)^2} \right] - \right.$$

$$- \frac{\sin t \alpha_n + 2\tau_{||}(\alpha_n + \omega_g) \cos t \alpha_n}{1 + 4\tau_{||}^2(\alpha_n + \omega_g)^2} - \frac{\sin t \alpha_n + 2\tau_{||}(\alpha_n - \omega_g) \cos t \alpha_n}{1 + 4\tau_{||}^2(\alpha_n - \omega_g)^2} \Bigg\}$$

$$\alpha_n = \sqrt{b^2 k_n^2 - \frac{1}{4\tau_{||}^2}}.$$

При подборе параметров стержня таким образом, чтобы выполнялось условие резонанса $\alpha_1 = \omega_g$, мы имеем

$$\xi(x^2, t) = \frac{\tau_{||} \omega_g^2 h_+}{4c} \sin t \omega_g \left(1 - e^{-\frac{t}{2\tau_{||}}}\right) C_1(c^2, k, \ell) X_1(x^2, k, \ell).$$

За счет изгибных колебаний (для первой моды которых имеет место резонанс) стержень поглощает на единицу массы мощность

$$W_{||} = 1,9 \cdot 10^{-2} \frac{\omega_g^4 h_+^2 v_s^2 R^2 \tau_{||}}{c^2},$$

а за счет Веберовских колебаний (которые нерезонансные) - мощность

$$W_{\perp} = 4,6 \cdot 10^{-3} \frac{\omega_g^3 h_+^2 R^3}{v_s \tau_{\perp}},$$

где v_s - скорость звука в стержне и τ_{\perp} - время затухания Веберовских колебаний. Отсюда следует, что

$$\frac{W_{||}}{W_{\perp}} = 4,1 \frac{v_s^3 \omega_g \tau_{||} \tau_{\perp}}{c^2 R}.$$

При использовании для получения оценок значений частоты пульсара $\omega_g = 380 \text{ с}^{-1}$ и скорости звука в алюминии $v_s = 5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ получим резонансную длину стержня для первой изгибной моды $\ell_{\text{pec}} = 49 \sqrt{R}$ см и

$$\frac{W_{||}}{W_{\perp}} = 0,14 \frac{\tau_{||} \tau_{\perp}}{R}.$$

Следовательно, стержень может получать больше энергии за счет квадратичных по вектору отклонения приливных сил чем линейных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таммело Р. // Phys. Lett. 1984. V. A106. P. 227.
2. Таммело Р.Р. // Препринт F-38 Отд. физ. и астрофиз. АН ЭССР, Тарту, 1987.
3. Таммело Р.Р. // В кн.: Гравитация и электромагнетизм - 1986, Под ред. Ф.И. Федорова. С.144-149. Изд. "Университетское", Минск, 1987.
4. Весман Э.А., Таммело Р.Р. // Труды Института физики АН ЭССР, 1987. № 62. С.80.

РЕШЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.И.Башков

Казанский государственный университет (Казань)

При исследовании расположения различных объектов в космическом пространстве возникает следующая задача:

С объекта A с координатами (x_A, y_A, z_A, t_A) посылается сигнал в направлении объекта B , достигающий B , когда он имеет координаты (x_B, y_B, z_B, t_B) , вообще говоря, неизвестные. Отразившись от B он возвращается на объект A' , имеющий уже координаты $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}, t_{A'})$. Зная начальные и конечные координаты объекта A и направление излучения и приема сигнала относительно реперов, связанных с объектом A , метрические свойства пространства, в котором проводится эксперимент, определить координаты объекта B в момент приема сигнала.

Используя понятие вектора конечного смещения $\vec{R}(A, B) = R^i \vec{e}_i(A)$ удовлетворяющего уравнениям

$$\tilde{\omega}^i = dR^i + (\Gamma^i_{jk} R^j - \delta^i_k) dx^k = 0 \quad (1)$$

$$\text{с условиями} \quad R^i(A, A) = 0 \quad (2)$$

приходим для решения задачи к уравнениям

$$-R^i(A, B) + R^i(A, A') = \overset{*}{R}^i(A' \rightarrow A, B) \quad (3)$$

где $\overset{*}{R}^i(A' \rightarrow A, B)$ компоненты вектора $\vec{R}(A' \rightarrow B)$ перенесенного параллельно из точки A' в точку A вдоль кривой движения объекта A . В случае сферы S^2 получаем формулы сферической тригонометрии для геодезических треугольников на сфере.

В случае метрики Шварцшильда также получены соответствующие формулы.

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Ю.П. ВЫБЛЫЙ

Институт физики АН БССР (Минск)

Как известно, уравнения Эйнштейна могут быть получены в рамках теории безмассового тензорного поля $\varphi^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского [1, 2], при этом они должны быть дополнены условиями, ограничивающими поле по спину

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{\gamma} (\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}), \quad (I)$$

где D_μ - ковариантная производная по метрике Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Рассмотрим гравитационное поле точечного электрического заряда, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна при условии (I). В стандартных координатах $(t, \rho, \theta, \varphi)$ оно описывается решением Рейсснера-Нордстрема

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[-\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho^2}\right), \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho^2}\right)^{-1}, \rho^2, \rho^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (2)$$

Интерпретация решения (2) затруднена тем, что тензор Минковского, соответствующий стандартным координатам, неизвестен. Перейдем к сферическим координатам (t, r, θ, φ) , при этом метрика должна удовлетворять уравнению (I) с тензором $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Записывая преобразование радиальной координаты в виде $\rho = \rho(r)$ получим следующее выражение для метрики в сферических координатах

$$g_{\mu\nu}^{\text{сф}} = \text{diag} \left[-\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho^2}\right)^{-1} \frac{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho^2}}{(\partial \rho / \partial r)^2}, \frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (3)$$

где функция удовлетворяет уравнению

$$\rho'' (\rho^2 - 2m\rho + \kappa) + 2r \rho'^3 - 2(\rho - m) \rho'^2 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть сведено к линейному уравнению второго порядка, в котором r рассматривается в качестве искомой функции

$$\begin{aligned} r''_y &= 2 \left[\rho^2(y) - 2m\rho(y) + \kappa \right] r, \\ y &= \int (\rho^2 - 2m\rho + \kappa)^{-1} d\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение уравнения (4) в виде $z = z(\rho)$ может быть получено в элементарных функциях. В зависимости от знака величины $m^2 - \kappa$ получим следующие решения:

$$z = A_1 R + A_2 \left(1 + \frac{R}{2\delta} \ln \left| \frac{R-\delta}{R+\delta} \right| \right), \quad m^2 > \kappa, \quad (6)$$

$$z = B_1 R + B_2 \left(1 + \frac{R}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{R}{\delta} \right), \quad m^2 < \kappa, \quad (7)$$

$$z = C_1 R + \frac{C_2}{R^2}, \quad m^2 = \kappa. \quad (8)$$

$$R = \rho^{-1/m}, \quad \delta = |m^2 - \kappa|^{1/2}.$$

Константы интегрирования должны находиться из требования исчезновения поля на бесконечности, что равносильно требованию

$$\begin{aligned} R \rightarrow \infty, \quad \partial R / \partial z \rightarrow 1, \\ z \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Это приводит к следующим условиям на константы

$$A_1 = C_1 = 1, \quad B_2 = \frac{2\delta}{\pi} (1 - B_1). \quad (10)$$

Таким образом, выражение для метрики $g^{\mu\nu}$ при условии (I) (в гармонических сферических координатах) для поля Рейснера-Нордстрема, и в частности для поля Шварцшильда, которое можно получить, полагая в (6), (3) $\kappa = 0$, может быть обобщено. При этом в метрику может войти новая константа. С точки зрения общей теории относительности эта константа характеризует систему координат, задаваемую преобразованием $\rho = \rho(z)$. Однако, с точки зрения теории гравитации в плоском пространстве решение найдено в обычных сферических координатах и интерпретация константы должна быть связана со свойствами поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Теория гравитации. М.: МГУ, 1985.
2. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Основы релятивистской теории гравитации. М.: МГУ, 1986.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А.А.Власов

Московский государственный университет

В работах[1] на простейшем примере гравитационного сжатия однородного по сопутствующему времени τ пылевидного облака(задача Толмена) был разобран коллапс в релятивистской теории гравитации (РТГ) и подчеркнуто его отличие от коллапса в ОТО.В[1] показано, что плотность вещества в сопутствующих координатах не обращается в бесконечность, никакого самозамыкания вещества внутри сферы Шварцшильда не происходит, не возникает областей, отрезанных от внешнего мира: в РТГ не образуются объектов с радиусами, меньшими радиуса Шварцшильда. Можно сказать, что данный результат в РТГ связан с тем, что все задачи в теории, как и задача о коллапсе, рассматриваются в определенном смысле с точки зрения пространства Минковского, то есть начальные, граничные и другие дополнительные физические условия задаются с точки зрения базисного в РТГ пространства - пространства Минковского. Эффективное искривленное пространство и его координаты в РТГ теряют определяющую роль, которую они играют в ОТО, и становятся вспомогательными величинами, смысл которых определяется прежде всего их связью с координатами исходного пространства Минковского. Для описания последнего в РТГ достаточно взять одну карту (например, галилеевы координаты t, x, y, z с областью изменения $-\infty \leq t, x, y, z < \infty$). Такое разделение ролей в РТГ возможно, так как уравнения РТГ содержат метрику пространства Минковского (см., например, [1, 2]). Таким образом РТГ позволяет отделить инерционные эффекты, вызванные изменением системы координат, от истинно гравитационных, решающим при этом является обращение к картине явления в пространстве Минковского. В частности, при описании гравитационного коллапса решающим является рассмотрение по времени t пространства Минковского, тогда как собственное время τ играет вспомогательную роль. (То, что собственные координаты нельзя вообще говоря рассматривать как определяющие, отмечалось в [3, 4], то,

что поверхность $\tau = \text{const}$ не является поверхностью Коши, отмечалось в [5]).

Конечно, для описания явлений можно использовать любые допустимые координаты (типа обобщенных в теоретической механике), но смысл этих переменных определяется не из интерпретации полученных в этих переменных решений, а прежде всего из связи переменных с исходными координатами базисного пространства; только после установления такой связи можно корректно определить динамику в заданной координатной сетке базисного пространства. Именно так и поступают в РТГ. Отметим, что рассмотрение в собственном времени "скрывает" некоторые реальные физические эффекты и только апелляция к исходной координатной сетке базисного пространства помогает эти эффекты "восстановить". Действительно, рассмотрим столкновение двух тел (1) и (2), движущихся равномерно и прямолинейно в пространстве Минковского (гравитации нет):

$$\vec{z}_{(1)} = \vec{z}_0 + \vec{v}_1(t_0 - t); \quad \vec{z}_{(2)} = \vec{z}_0 + \vec{v}_2(t_0 - t).$$

Тела (1) и (2) сталкиваются ($\vec{z}_{(1)} \rightarrow \vec{z}_{(2)}$) в точке \vec{z}_0 при $t = t_0$. Запишем теперь уравнения движения этих тел в собственном времени τ , определяемом как

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (d\vec{z})^2.$$

Тогда уравнения

движения примут вид

$$\vec{z}_{(a)} = \vec{z}_0 + \vec{v}_a f_a(\theta_a - \tau_{(a)}); \quad f_a = (1 - v_a^2)^{-1/2}; \quad \theta_a = \text{const}, \quad a=1,2$$

а так как вообще говоря $\theta_1 \neq \theta_2$, то из этого вида уравнений увидеть столкновение частиц нельзя. Только вернувшись к исходной постановке задачи можно увидеть, что собственные времена $\tau_{(1)}$ и $\tau_{(2)}$ тел не являются независимыми, а связаны соотношением $f_1(\theta_1 - \tau_{(1)}) = f_2(\theta_2 - \tau_{(2)}) = t_0 - t$.

Тогда легко заключить, что тела сталкиваются и по собственным временам каждой из частиц: $\tau_{(1)} = \theta_1$ и $\tau_{(2)} = \theta_2$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в задаче о коллапсе в РТГ. Рассмотрение по времени τ пространства Минковского радиально падающих частиц во внешней метрике Шварцшильда позволяет обнаружить столкновение частиц на сфере Шварцшильда, которое происходит как с точки зрения удаленного наблюдателя (по времени t), так и с точки зрения сопу-

тствующего любой из частиц наблюдателя (по времени τ). Поэтому и для задачи о коллапсе сферически симметричного облака пыли начальные данные надо ставить по времени \bar{t} . Решение такой задачи в РТГ еще не получено, однако так как внешнее (для пыли) решение должно совпадать (в соответствующих координатах) с решением Шварцшильда, то предыдущий вывод справедлив и здесь: сфера Шварцшильда является границей области применимости рассматриваемой модели, происходит пересечение слоев коллапсирующего вещества. Это явление возникает вследствие естественной для РТГ постановки задачи по времени \bar{t} пространства Минковского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А.А., Логунов А.А., ТМФ, 1985, 63, 3; ТМФ, 1987, 71, 323.
2. Власов А.А., Письма в ЕЭТФ, 1987, 46, 5.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения, М.: Физматгиз, 1961.
4. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной, М.: Наука, 1975.
5. D.M. Eardley, L. Smarr, Phys. Rev., 1979, D 19, 2239.

КЕРР-НЬОМЕНОВСКОЕ РЕШЕНИЕ В РТГ

П.В.Карабут, Ю.В.Чугреев

НИИЯФ МГУ (Москва)

Релятивистская теория гравитации (РТГ) [1], построенная на основе пространства-времени Минковского, принципа геометризации и представлений о гравитационном поле Φ^{ik} как о физическом поле в духе Фарадея-Максвелла, объясняет все известные гравитационные эксперименты и дает новое предсказание о развитии Вселенной, коллапсе и т.д.

Система уравнений РТГ имеет вид:

$$R^i_k - \frac{1}{2} \delta^i_k R = 8\pi T^i_k, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_i \sqrt{-g} g^{ik} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathcal{D}_i -ковариантная производная по метрике g_{ik} пространства Минковского. Метрика эффективного риманова пространства-времени g^{ik} связана с γ^{ik} и с гравитационным полем Φ^{ik} соотношением

$$\sqrt{-g} g^{ik} = \sqrt{-\gamma} (\gamma^{ik} + \Phi^{ik}).$$

Из (2) следует уравнение, определяющее связь галилеевых (ξ^i) координат пространства Минковского и координат, в которых задано решение одних только уравнений Эйнштейна (1)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{-g} g^{pq} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^q} \right) = 0. \quad (3)$$

В работе [2] рассматривалось внешнее аксиально-симметричное решение для вращающегося тела в РТГ. Следуя методике [2], в [3] было получено решение для заряженного вращающегося тела массы m , заряда q , обладающего моментом вращения ma и, следовательно, магнитным моментом. В этих работах не поднимался вопрос о единственности, но взаимная однозначность преобразования координат была доказана. В работе Руиза [4] была предложена схема разделения переменных в

уравнении (3) для случая, когда метрика $g^{\mu\nu}$ является метрикой Керра, взятой в координатах Бойера-Линдквиста (БЛ) [5]. Однако среди приведенных в [4] решений не содержится решения [2]. Этот факт связан с тем, что решение уравнения (3), полученное в [4], не является наиболее общим. Применение схемы разделения переменных [4] для более общего случая метрики Керра-Ньюмена [6], позволяет получить наиболее общий вид решения уравнения (3) и выделить из него то решение, которое удовлетворяет условию взаимно однозначного соответствия декартовых координат пространства Минковского и координат Бойера - Линдквиста. Только при выполнении этого условия решение уравнения (3) будет являться решением РТГ.

Для метрики Керра-Ньюмена в координатах БЛ имеем выражение для ковариантного даламбертиана

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{g^2} \left\{ \frac{\Delta}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{2a(2mr - q^2)}{\Delta} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\},$$

где $x^i = \{T, r, \theta, \varphi\}$ $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$,

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr + q^2 = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_{\pm} = m \pm \mu,$$

$$\mu = \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}, \quad m^2 \geq a^2 + q^2, \quad \Lambda = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta.$$

Решение (3) будем искать в аксиально-симметричном виде:

$$x = A(r, \theta) \cos \varphi + B(r, \theta) \sin \varphi, \quad t = T,$$

$$y = A(r, \theta) \sin \varphi - B(r, \theta) \cos \varphi, \quad z = f(r, \theta).$$

причем при $r \rightarrow \infty$ должно быть $A \rightarrow r \sin \theta$, $B \rightarrow 0$, $f \rightarrow r \cos \theta$.

Разделение переменных по методике [4] дает

$$A(r, \theta) = [(r - m) \cos \nabla - a \sin \nabla] \sin \theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \left(\frac{r}{\mu} \mathcal{R}_{\ell}^{(\ell-1)}(\epsilon) \cos \nabla - \mathcal{P}_{\ell}^{(\ell)}(\epsilon) \sin \nabla \right) P_{\ell}^1(\cos \theta),$$

$$B(r, \theta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \left(\frac{a}{\mu} \mathcal{R}_{\ell}^{(\ell-1)}(\epsilon) \cos \nabla - \mathcal{P}_{\ell}^{(\ell)}(\epsilon) \sin \nabla \right) P_{\ell}^1(\cos \theta),$$

$$f = (r - m) \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} q_{\ell} Q_{\ell} \left(-\frac{r - m}{\mu} \right) P_{\ell}(\cos \theta), \quad \nabla = \frac{a}{2\mu} \ln \frac{r - r_+}{r - r_-},$$

$$u = \epsilon = (r - r_-)/2\mu, \quad a_{\ell}, b_{\ell}, q_{\ell} - \text{произвольные const, } P_{\ell}^1 -$$

присоединенная функция Лежандра, Q_ℓ - функция Лежандра второго рода, $P_\ell^{(\ell)}$, $R_\ell^{(\ell-1)}$ - действительные полиномы степеней ℓ и $\ell-1$ соответственно, определяются соотношением [4]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\ell+k)!}{k! (\ell-k)!} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(k+\ell+1)} \mu^k = P_\ell^{(\ell)}(\mu, \lambda^2) + \lambda R_\ell^{(\ell-1)}(\mu, \lambda^2), \quad \lambda = \frac{ia}{\mu}.$$

Для внешнего решения взаимно однозначное соответствие координат ξ^i и координат χ^i должно выполняться в области $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$, $r > r_+$, где θ_0 , φ_0 - сферические угловые координаты пространства Минковского. Из рассмотрения предельного перехода $r \rightarrow r_+$ (r_+ - горизонт метрики Керра-Ньюмена) можно показать, что взаимно однозначному преобразованию координат из всей области существования решения Керра-Ньюмена отвечает единственный набор коэффициентов $q_0 = a_1 = 0$, $b_1 = -\mu$, $q_1 = 0$, $q_\ell = a_\ell = b_\ell = 0$, $\ell \geq 2$. Окончательно, связь между координатами пространства Минковского и координатами эффективного риманова пространства представляется в виде

$$\begin{cases} t = T \\ \chi = \sqrt{(r-m)^2 + a^2} \sin \theta \cos(\varphi + \varphi - \omega + \frac{\pi}{2}), \\ y = \sqrt{(r-m)^2 + a^2} \sin \theta \sin(\varphi + \varphi - \omega + \frac{\pi}{2}), \\ z = (r-m) \cos \theta, \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{a}{2\mu} \ln \frac{r-r_+}{r-r_-}, \quad \omega = \arctg \frac{r-m}{a}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. Власов А.А., Логунов А.А. // ТМФ. 1987. Т. 70. № 2. С. 171-179.
3. Крабут П.В., Чугреев Ю.В. Внешнее аксиально-симметричное решение для заряженного вращающегося тела в релятивистской теории гравитации. Препринт № 87-142. Серпухов, ИФВЭ. 1987.
4. Ruiz E. // Gen. Rel. Grav. 1986. Vol. 18. № 8. P. 805-812.
5. Kerr R.P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237-238.
6. Newman E.T. et al // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918-919.

ШТЕККЕЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА ВАКУУМА В ТЕОРИИ БРАНСА-ДИККИ

В.Г.Багров, В.В.Обухов, К.Е.Осетрин
ИСЭ СО АН СССР, ТГПИ (Томск)

Штеккелевым пространством называют риманово пространство с метрическим тензором g_{ij} , в котором уравнение Гамильтона-Якоби для пробной массивной частицы

$$g^{ij} S_{,i} S_{,j} - m^2 = 0$$

$$m = \text{const} \quad (1)$$

может быть проинтегрировано методом полного разделения переменных. Основные определения и теоремы, относящиеся к штеккелевым пространствам, и ссылки на литературу можно найти в работах [1,2]. Нашей целью является нахождение для штеккелевых пространств всех неэквивалентных решений полевых уравнений теории Бранса-Дикки (ТБД) для вакуума [3]:

$$\begin{cases} R_{ij} = \varphi_{;i;j} + \lambda \varphi_{;i} \varphi_{;j} \\ g^{ij} (\varphi_{;i;j} + \varphi_{;i} \varphi_{;j}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

где φ - скалярное поле, $\lambda = \text{const}$; R_{ij} - тензор Риччи. Эквивалентными считаются решения, сводящиеся друг к другу преобразованием координат и конформными преобразованиями метрики.

Воздействие гравитации на физические системы в ТБД и ОТО полностью эквивалентно и определяется метрическим тензором. В ТБД как и в ОТО, пробные частицы движутся по геодезическим, поэтому штеккелевы пространства в ТБД имеют такое же значение, что и в ОТО. С другой стороны, при нахождении точных решений уравнений поля ТБД штеккелевы пространства играют более важную роль, чем в ОТО, поскольку в этих пространствах имеется возможность найти общее решение скалярного уравнения (3).

В данном докладе рассматривается классификация изотропных штеккелевых пространств. Для иллюстрации рассмотрим штеккеле-

во пространство типа (2.1). Метрический тензор в системе координат x^i , связанной с приведенной системой координат u^i (где происходит разделение переменных) соотношением

$$\begin{aligned} x^0 &= u^2, & x^1 &= u^0, & x^3 &= u^3 \\ x^2 &= u^1 + f_0(u^2)u^0 \end{aligned} \quad (4)$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} ds^2 = \Delta \left\{ \left[-a_3(x^3) + B^2/G \right] dx^{02} + 2dx^0 dx^1 - \right. \\ \left. - 2B/G dx^0 dx^2 + dx^{22}/G - dx^{32} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Delta = \tau_0(x^0) + \tau_3(x^3)$,

$$B = f_0(x^0)a_3 + b_3(x^3) + \frac{df_0}{dx^0} x^1,$$

$$G = -\Delta^2/L^2 = f_0^2 a_3 + 2f_0 b_3 + c_0(x^0) + c_3(x^3). \quad (6)$$

Поскольку на скалярное поле φ заранее не накладывается никаких ограничений, то существенную роль играет исследование условий совместности системы (2) - (3). При этом возникают две несводимые друг к другу возможности.

$$\text{I. } \varphi_{,1}^2 + \varphi_{,2}^2 \neq 0 \quad (7)$$

$$\text{II. } \varphi_{,1} = \varphi_{,2} = 0 \quad (8)$$

Условия совместности накладывают довольно жесткие ограничения на функции, входящие в метрические коэффициенты. В частности нетрудно показать, что в случае (7) $f_0 = 0$.

В случае (7) исследование уравнений совместности позволяет найти явную зависимость φ от x^1, x^2 . Полагая для обеспечения разделения переменных в уравнении (3)

$$L = c_0(x^0)c_3(x^3) \quad (9)$$

и используя условия (6), после простых, хотя и громоздких расчетов можно получить все решения системы (2)–(3).

В случае 8 задачу удалось решить благодаря тому, что в системе (2)–(3) оказалось возможным выделить и проинтегрировать автономную подсистему уравнений только на функции L , Δ , φ .

При $f_0 = 0$ функциональные условия (6) дополнительно конкретизируют решения автономной подсистемы. В случае $f_0 \neq 0$ роль уравнений (6) более существенна. С их помощью задаются все входящие в \mathcal{G}_0 функции с точностью до некоторых произвольных постоянных. Это осуществляется путем разложения оставшихся уравнений по линейно независимым функциям от переменной χ^3 , которые возникают при решении автономной подсистемы. Заметим, что часть вычислений проводилась с использованием системы аналитических вычислений ЭВМ "Reduce".

В частности, рассчитаны спинные коэффициенты, компоненты тензора Вейля и тензора кривизны, осуществлена алгебраическая классификация полученных решений. Была также составлена программа, позволившая в автоматическом режиме рассмотреть условия совместности полевых уравнений. В дальнейшем предполагается осуществить полную классификацию неизотропных штеккелевых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров В.Г., Обухов В.В., Шаповалов А.В. // Известия вузов СССР, Физика. 1983. Вып.3. С.115.
2. Багров В.Г., Обухов В.В. // Фундаментальные взаимодействия - 1984. Москва, МПИ. С.188.
3. Багров В.Г., Обухов В.В., Осетрин К.Е. Изотропные штеккелевы пространства в теории Бранса-Дикке. Препринт ТФ СО АН СССР, 1987. № 7. 16 с.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕМЕННОГО ВО ВРЕМЕНИ КВАДРУПОЛЯ В ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Н.В.Мицкевич, Санджай Шарма

УДН им. П.Думумби (Москва)

Основываясь на работе [1], мы исследуем частный случай гравитационного поля неподвижного и меняющегося во времени массового квадруполь в линеаризованной теории. Плотность метрического тензора имеет вид $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - u^{\alpha\beta}$, так что ищется точное решение уравнений поля

$$\square u_{\mu\nu} = 0, \quad u^{\mu\nu}_{;\mu} = 0,$$

которое имеет вид

$$u^{\mu\nu} = (u^{\mu\nu} Q^{\alpha\beta} u^{\alpha\beta}) / D, \alpha, \beta,$$

где

$$Q^{\alpha\beta} = Q^{\beta\alpha}; \quad Q^{\mu\nu} u_{\mu\nu} = 0; \quad D = u^{\alpha} R_{\alpha}; \quad R^{\alpha} R_{\alpha} = 0;$$

$$R^0 = t - t'; \quad R^i = x^i - x^i_0(t'); \quad u^{\alpha} = dx^{\alpha}_0/ds_0 = \delta^{\alpha}_0.$$

Наша основная цель — исследование полученного решения в ближней и волновой зонах. Вычислены необходимые конкомитанты метрики, которые, однако, слишком громоздки даже в линеаризованном случае, так что их невозможно здесь привести. В частности, явно проиллюстрирована теорема Сакса о асимптотическом расщеплении тензора конформной кривизны Вейля. Ввиду задания фоновой метрики Минковского (стандартное предположение линеаризованной теории) при вычислении энергетических характеристик поля используется псевдотензор Папалетру. Результаты находятся в согласии с известной "квадрупольной формулой" теории гравитационного излучения.

Точное решение линеаризованной теории гравитации, охватывающее сразу и ближнюю, и волновую зоны, может быть важно при анализе нелинейной задачи о гравитационном излучении, так как в ней приходится сшивать полученные по отдельности приближенные решения для этих областей где-то между ними, тогда как линейная теория даёт явный аналитический вид поля во всём пространстве; к тому же в области сшивания гравитационные поля ещё достаточно слабы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич Н.В.// Гравитация и электромагнетизм — 1986. Минск: Университетское. 1987.

ДВА АКСИСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОТО

Г.Г.Арутюнян, В.В.Шаполян

Ереванский государственный университет (Ереван)

Обобщенная теория тяготения (ОТТ), или как ее иначе называют тензорно-скалярная теория гравитации, на наш взгляд, не альтернативна ОТО, а скорее родственна ей, являясь, по сути, обобщением ОТО в духе Калуцы-Клейна. Такое мнение сложилось в результате анализа основ ОТТ, формулированных Йорданом [1] и стало более зримым после того, как удалось обнаружить возможность отыскания решений ОТО из известных решений ОТТ и наоборот в случае аксисимметричных электровакуумных гравитационных полей [2].

В настоящем сообщении эта возможность демонстрируется использованием статического сферически-симметричного решения ОТТ для заряженного тела, найденного в [3]. Получено новое решение ОТО, относящееся к классу Вейля. Во втором разделе на основе этого решения генерируется соответствующее стационарное типа Керра-Ньюмана.

I. Статическое решение ОТО для источника с зарядом e в координатах кривизны r, θ имеет вид

$$ds^2 = \frac{k^2}{F^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n dt^2 - \frac{F^2}{k^2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n \left(\frac{x^2-y^2}{x^2-1} \right)^{-n^2} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2-1} \right) dr^2 - \Phi_1^{-1} \left[\Phi_2^{-1} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (I)$$

где

$$F = \frac{2r_0 + m}{2n} \left[1 + \frac{2r_0 - m}{2r_0 + m} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n \right], \quad 2r_0 = \kappa n = \sqrt{m^2 - e^2}$$

$$\Phi_1^{-1} = F^2 n^2 (u^2 - 1) \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n, \quad \Phi_2^{-1} = \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right)^{n^2} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2-1} \right)$$

Вытянутые сфероидальные координаты x, y связаны с координатами $u = (r-m)/2r_0$ и $v = \cos \theta$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{n}{\sqrt{2}} \left[u^2 + v^2 + \frac{1-n^2}{n^2} \pm \sqrt{(u^2 + v^2 + \frac{1-n^2}{n^2})^2 - \frac{4u^2v^2}{n^2}} \right]^{1/2}$$

Тело обладает квадрупольным моментом

$$D = 2m(m^2 - e^2)(n^2 - 1)/3n^2$$

При $n = 1$ (I) совпадает с решением Райснера-Нордстрема, а при $e = 0$ с решением, полученным в [4].

2. Ньюманом [5] разработан алгоритм, который позволяет из статического решения для заряженной сосредоточенной массы (базисная метрика) получить соответствующее стационарное (типа Керра-Ньюмана). Использование этой процедуры обосновано Талботом [6].

Выберем в качестве базисной метрики найденное решение (I), переписав его в расширяющейся системе координат Эддингтона-Финкельштейна $dt = du + \sqrt{g_{11}/g_{00}} dr$ и введем, следуя Ньюману комплексную изотропную тетраду так, чтобы

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= l^\mu n^\nu + \bar{l}^\mu \bar{n}^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu, \\ l^\mu &= \delta_1^\mu, \quad n^\mu = \delta_0^\mu g^{01} + \frac{1}{2} \delta_1^\mu g^{41}, \\ \left(\frac{m^\mu}{\bar{m}^\mu} \right) &= \sqrt{\Phi_1/2} \left(\sqrt{\Phi_2} \delta_2^\mu \pm i \delta_3^\mu / \sin \theta \right) \end{aligned}$$

(черта над буквой означает комплексное сопряжение). Считая координаты r и u комплексными, выполним преобразование $r' = r - i b \cos \theta$, $u' = u + i b \cos \theta$, предполагая при этом что новые координаты r' и u' действительны. В результате компоненты изотропной тетрады преобразуют вид

$$\begin{aligned} l'^\mu &= \delta_1^\mu, \quad n'^\mu = g^{01} \delta_0^\mu + \frac{1}{2} \delta_1^\mu g^{41}, \\ \left(\frac{m'^\mu}{\bar{m}'^\mu} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\Phi_1}}{\sqrt{\Phi_2}} \right) \left\{ [\pm i b \sin \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu] \sqrt{\Phi_2} \pm \frac{i \delta_3^\mu}{\sin \theta} \right\} \end{aligned}$$

Все штрихованные величины должны быть взяты из преобразованных к координатам u , r выражений (I) с учетом

$$1/r \rightarrow r'/\rho^2, \quad r\bar{r} \rightarrow \rho^2, \quad \rho^2 = r'^2 + b^2 \cos^2 \theta.$$

Для того, чтобы записать найденную метрику в обычной форме $ds^2 = e^{2\lambda} (dt - q dy)^2 - e^{2\beta} dr'^2 - e^{2\mu} d\theta^2 - e^{2\gamma} dy^2$

преобразуем ее согласно $du' = dt + A dr'$, $dy = dy + B dr'$.

Тогда

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} &= g'_{00}, \quad q = A(g'_{00} - g'_{01})/g'_{00}, \\ e^{2\beta} &= g'_{01} g'_{33} / (g'_{00} g'_{33} - A^2 g'^2_{01}), \\ e^{2\gamma} &= (A^2 g'^2_{01} - g'_{00} g'_{33})/g'_{00}, \quad e^{2\eta} = -g'_{22}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$A = \sin^2 \theta \cdot \sqrt{\Phi_2}, \quad g'_{00} = \frac{k^2}{F F'} \left(\frac{x'-1}{x'+1} \right)^n,$$

$$g'_{01} = \frac{k}{\sqrt{\Phi_2}}, \quad g'_{22} = -\frac{1}{\Phi_2' \sqrt{\Phi_1 \Phi_1'}}, \quad g'_{33} = -\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_1'}}.$$

При $n = 1$ полученное совпадает с известным решением Керра-Ньюмана и поэтому является его обобщением на случай, когда и в отсутствие вращения тело-источник обладает аксиальной симметрией (квадрупольный момент содержит член, не зависящий от угловой скорости).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan P. *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig. 1955.
2. Papoyan V. *Ap. and Sp. Sci.* 1986. Vol.124. P.335.
3. Haroutyounian G., Papoyan V. *Ap. and Sp. Sci.* 1985. Vol. 117. P.189.
4. Zipoy D.M. // *J.Math.Phys.* 1966. Vol.7. P.1137.
5. Newman E.T. // *J.Math.Phys.* 1965. Vol.6. P.918.
6. Talbot C.J. // *Comm.Math.Phys.* 1979. Vol.13. P.45.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Э.В.Чубарян, О.А.Григорян, Б.В.Хачатрян

Ереванский государственный университет (Ереван)

Несмотря на широкое развитие численных методов решения задач теорий гравитации, нахождение точных аналитических решений привлекает всегда особый интерес в изучении этих теорий. В случае рассмотрения широкого класса реальных моделей звезд, сильно выраженная нелинейность уравнений поля биметрической теории не позволяет найти аналитических решений.

Однако, к проблеме нахождения аналитических решений можно подойти также с иных позиций, а именно - не задавая изначально уравнение состояния звездного вещества, попытаться его оп-ределить так, чтобы уравнения поля приводились к аналитичес-ки разрешимым уравнениям.

Последний метод был применен в задаче сферически - и ак-сиально-симметрических стационарных полей, разработанной в работах [1-2]. Таким путем найдены аналитические решения для модельного уравнения состояния $\rho = \alpha \mathcal{P}$, где па-раметр α имеет значение 0.4641.

При выборе плоской и искривленной метрик ds^2 и $d\mathcal{S}^2$ для стационарных полей в виде

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}^2 &= dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ ds^2 &= e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\mathcal{U}} dr^2 - r^2 e^{2\psi} (d\theta + r dr)^2 - r^2 \sin^2 \theta e^{2\alpha} (d\varphi + r \omega dt)^2, \end{aligned} \quad (I)$$

полевые уравнения и уравнение гидродинамики в сферически-симметрическом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} &= \frac{M}{z^2}, \quad \frac{dM}{dz} = 4\pi e^{\Phi+3\mathcal{U}} (\rho + 3\mathcal{P}) z^2, \\ \frac{d\mathcal{U}}{dz} &= -\frac{M'}{z^2}, \quad \frac{dM'}{dz} = 4\pi e^{\Phi+3\mathcal{U}} (\rho - \mathcal{P}) z^2, \\ \mathcal{P}' + (\mathcal{P} + \rho) \Phi' &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее в случае выбранного уравнения состояния сразу интегрируется

$$P(z) = P_c \exp[(\alpha+1)(\phi_c - \phi(z))], \quad (3)$$

где P_c и ϕ_c — значения давления и компоненты метрического тензора в центре конфигурации. В качестве границы конфигурации можно выбрать поверхность сферы, на которой отношение $P(R_c)/P_c$ очень мало и полученные решения сплечь с решением уравнений Розена вне распределения масс [3]. Из системы уравнений (2) следует

$$M'(z) = \frac{\alpha-1}{\alpha+3} M(z), \quad \psi(z) - \psi_c = -\frac{\alpha-1}{\alpha+3} [\phi(z) - \phi_c]$$

Итак, задача сводится к интегрированию следующей системы

$$\frac{df}{dx} = \frac{m(x)}{x^2}, \quad \frac{dm}{dx} = e^{-f(x)} x^2 \quad (4)$$

с начальными условиями $m(c) = 0$, $F(c) = C$. Здесь $f = \alpha F$, $F(x) = \phi(x) - \phi_c$, $M = \beta m$, $z = \gamma x$, где величины α , β и γ определяются из соотношений

$$\alpha = \frac{a^2 + 6a - 3}{a + 3}, \quad 4\pi\alpha^3\beta^2(a+3)P_c e^{\phi_c + 3\psi_c} = 1, \quad \alpha\beta = \gamma. \quad (5)$$

Система (4) решается численно. Переобозначение функций позволяет только одним численным интегрированием определить интегральные параметры конфигураций для любых значений постоянной a и центральной плотности.

В случае $a = \sqrt{12} - 3$, $\alpha = 0$ и система (4) аналитически интегрируется

$$m = \frac{x^3}{3}, \quad F = \frac{x^2}{6}, \quad \phi_c = -\frac{x_c^2}{2}, \quad \psi_c = -0.0774 x_c^2.$$

Для массы и радиуса конфигурации имеем

$$M = \frac{0.05 x_c^3}{\sqrt{P_c}} e^{0.732 x_c^2}, \quad R = \frac{0.1516}{\sqrt{P_c}} e^{0.732 x_c^2} x_c.$$

В случае аксиально-симметрического распределения масс метод, разбитый в [4], позволил определить момент инерции (первое приближение по угловой скорости вращения)

$$J/J_0 = \int_0^2 e^{-z} z^{-3/2} [AF(2, 5/2, z) + 1/4] dz,$$

где γ_c - постоянная, зависящая от R_c , $z = 0.281 \times^2$. Для определения массы квадрупольного момента и формы вращающейся конфигурации задача решается в квадратичном по угловой скорости вращения приближении.

Этот метод обратной задачи можно развить и для нахождения аналитических решений, непротиворечащих физической реальности. Такая попытка для биметрической теории была сделана в случае сферически-симметричного распределения массы [5].

Метод заключается в следующем: выбирается определенный вид одного из потенциалов поля и решаются полевые уравнения без конкретного выбора вида уравнений состояния $p = p(\rho)$. При этом на внутренние решения накладываются следующие необходимые условия: на границе конфигурации давление и плотность звездного вещества превращаются в нуль; в центре конфигурации давление и плотность имеют конечную величину; давление и плотность монотонные и положительные функции от радиуса; скорость звука в звездном веществе не может превышать скорости света.

В качестве примера рассмотрена следующая модель:

$$\phi + \psi = \frac{\mathcal{D}}{3} \left(-\frac{7}{5} + \frac{1}{6t^2} - \frac{1}{10t^4} + \frac{1}{30t^5} \right)$$

$$\rho = \frac{\mathcal{D} e^{-\phi - 3\psi}}{48\pi R_0^2} \left(1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right)$$

$$M = \mathcal{D} \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{1}{200}} R_0, \quad M' = M - \frac{11}{90} \mathcal{D} R_0$$

где R_0 - радиус конфигурации, $t = R_0/\epsilon$, а \mathcal{D} произвольно задаваемая положительная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авакян Р.М., Саркисян А.В., Чубарян Э.В. // Ученые записки ЕГУ. 1987. Т.164. № 1. С.69.
2. Авакян Р.М., Григорян О.А., Чубарян Э.В. // Изв. АН Арм.ССР (в печати).
3. Rosen N. // Ann. of Phys. 1974. Vol.84. P.445.
4. Григорян О.А., Чубарян Э.В. Астрофизика. 1985. Т.23. С.177.
5. Заславский Д.И., Чубарян Э.В. // Ученые записки ЕГУ (в печати).

ПРОСТРАНСТВА ШТЕККЕЛЯ ТИПА $(2, n)$, ДОПУСКАЮЩИЕ ВЕКТОР ЯНО.

В.Г. Багров, А.В. Шаповалов, А.А. Евсеевич

Томский государственный университет,

Институт сильноточной электроники

СО АН СССР (Томск)

Найдены классы метрик 4-мерных пространств Штеккеля типа $(2, n)$ ($V(2, n)$) лоренцевой сигнатуры, допускающих векторное поле Яно. Проведено разделение переменных в уравнении Дирака в этих пространствах.

Пространство $V(2, n)$ есть, по определению, риманово пространство, в котором существует полный набор

$$\{Y_p^i(x), \chi^{ij}(x)\}, \quad i, j, k = 0, \dots, 3, \quad p, q = 0, 1, \quad (I)$$

состоящий из взаимно коммутирующих векторных полей $\{Y_p^i\}$ и тензорного поля χ^{ij} Киллинга, линейно независимых друг от друга и от метрики пространства $g^{ij}(x)$, а также удовлетворяющих специальным алгебраическим условиям, которые здесь не приводятся. Общее определение штеккелевых пространств дано в работе [1].

В пространствах $V(2, n)$ допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона-Якоби $g^{ij} \partial S / \partial x^i \partial S / \partial x^j - m^2 = 0$. Этого, однако, недостаточно для полного разделения переменных в уравнении Дирака. Таким образом, возникает проблема нахождения подпространств штеккелевых пространств, допускающих полное разделение переменных в уравнении Дирака. К таким подпространствам относятся пространства $V(2, n)$, допускающие векторное поле Яно.

Векторное поле Яно $\eta^i(x)$ определяется уравнением

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{4} g_{ij} \eta^k_{,k}, \quad (2)$$

где запятой обозначена ковариантная производная.

Определение. Пространство $V(2, n)$ допускает векторное поле Яно $\eta^i(x)$, если тензорное поле Киллинга χ^{ij} из полного набора (I) определяется по формуле

$$\epsilon \chi^{ij} = \eta^i \eta^j - g^{ij} \eta^k \eta_k, \quad (3)$$

$$\epsilon = \pm 1.$$

Метрики пространств $V(2,n)$ общего вида в привилегированной системе координат приведены в [2]. Условия (2), (3) выделяют из них искомые метрики, которые, с точностью до эквивалентности [2], определяются следующими выражениями.

Пространство $V(2,0)$.

$$ds^2 = \varphi_2(x^2) [\alpha_{pq}(x^2) dx^p dx^q + (dx^2)^2 + e(dx^1)^2] \quad (4)$$

$$\eta^i = (0, 0, 1, 0).$$

Здесь $\varphi_2(x^2)$, $\alpha_{pq}(x^2)$ — произвольные функции указанных переменных, $e = \pm 1$.

Пространство $V(2,1)$.

$$ds^2 = \varphi_3(x^2) [\beta_2^{-1}(x^2) (\alpha_2(x^2) dx^0 + dx^1)^2 + 2dx^0 dx^1 + (dx^1)^2], \quad (5)$$

$$\eta^i = (0, 0, 0, 1).$$

Здесь $\varphi_3(x^2)$, $\beta_2(x^2)$, $\alpha_2(x^2)$ — произвольные функции.

Уравнение Дирака в пространстве $V(2,n)$ запишем, используя обозначения работы [3, с. 253]:

$$H\psi \equiv (\gamma^k P_k - m)\psi = 0. \quad (6)$$

Здесь γ^k — матрицы Дирака, $\gamma^k \gamma^j + \gamma^j \gamma^k = 2g^{kj}$, $P_k = i(\nabla_k - \Gamma_k)$, ∇_k — ковариантная производная, $\Gamma_k = \gamma_{,j}^k \gamma^j / 4$. Для разделения переменных в уравнении Дирака в пространствах вида (4), (5) используется спинорный оператор симметрии (с матричными коэффициентами при производных)

$$X = \gamma^5 [\gamma^k, \gamma^j] \eta_j P_k + (3i/4) \gamma^5 \nabla_k \eta^k.$$

Необходимо также провести преобразование искомой функции ψ неособенной матрицей S :

$$\psi = S\phi.$$

При этом уравнение (6) переходит в эквивалентное ему уравнение

$$\tilde{H}\phi = (S^{-1}HS)\phi = 0.$$

Разделение переменных проводится в уравнении эквивалентном уравнению Дирака (6).

В качестве иллюстрации приведем результат для пространств

ва $V(2,0)$ вида (4), когда

$$ds^2 = \varphi_2^2 \{ -\delta_3^{-2} [(\alpha_3 dx^0)^2 + (\beta_3 dx^1)^2 + 2\gamma_3 dx^0 dx^1] + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \}$$

где $\varphi_2(x^1), \alpha_3(x^1), \beta_3(x^1), \gamma_3(x^1)$ — произвольные функции,

$$\delta_3^2 = (\alpha_3 \beta_3)^2 - \gamma_3^2 > 0.$$

Для записи матрицы Дирака в искривленном пространстве лоренцевой сигнатуры, согласно [3], вводится комплексная световая тетрада, $\{ \rho^i, n^i, m^i, \bar{m}^i \}$, которая в данном случае выбирается в виде

$$\begin{aligned} \rho^j &= \varphi_2^{-2} (0, 0, 1, -1), & m^j &= (\sqrt{2} \varphi_2)^{-1} (iB, -i\alpha_3, 0, 0), \\ n^j &= \frac{1}{2} (0, 0, 1, 1), & B &\equiv (\gamma_3 + i\delta_3) \alpha_3^{-1}. \end{aligned}$$

Решение уравнения Дирака представляется следующим образом

$$\Psi = \varphi_2^{3/2} \delta_3^{1/2} \exp(ik_\rho x^\rho) \exp(\frac{t}{2} \rho_3 \delta_3) \Phi.$$

Спинор $\Phi(x^2, x^3)$ определяется системой в разделенных переменных

$$\begin{aligned} &[\partial/\partial x^2 + m \varphi_2 i \rho_1 - \frac{i}{2} \lambda \rho_3] \Phi = 0, \\ &\{ \partial/\partial x^3 + \frac{1}{2} k_0 [B(i\delta_2 - \sigma_1) - \bar{B}(i\delta_2 + \sigma_1) + \\ &+ \alpha_3 k_1 \sigma_1 + \frac{i}{2} \operatorname{Re}(F) - \frac{i}{2} \lambda \delta_3] \} \Phi = 0. \end{aligned}$$

Здесь $F = (\dot{\alpha}_3 B - \dot{B} \alpha_3)/2\delta_3$, точкой обозначена производная по x^1 ; k_ρ, λ — параметры разделения переменных, $t = \ln(\varphi_2/\sqrt{2})$, $\delta_k, \rho_k, k=1,2,3$ — постоянные матрицы Дирака [4, с. 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаповалов В.Н. // Сиб. мат. журнал. 1979. Т. 20. С. III7.
2. Багров В.Г., Обухов В.В., Шаповалов А.В. // Гравитация и теория относительности. Казань: КГУ, 1986. С. 10.
3. Гальцов В.Д. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М.: МГУ, 1986.
4. Багров В.Г., Гитман Л.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАДРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА-ФОКА

В.Г.Багров, В.В.Осухов

Институт сильноточной электроники СО АН СССР (Томск)

Используя стандартные обозначения формализма Ньюмена-Пенроуза [1-3], запишем уравнения Дирака-Фока в виде:

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{\psi} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{p}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \hat{p}_2 \hat{\sigma}_2 & \hat{0} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} i\hat{\sigma}_2 & \hat{0} \\ \hat{0} & -i\hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi^A \\ \mu^A \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

где ψ^A , μ^A - спинорные поля, $\hat{\sigma}_i$ - матрицы Паули;

$$\hat{p}_1 = \sqrt{2} i (\hat{1}\hat{\Delta} + \hat{4}\hat{\Sigma} - \hat{2}\hat{J} - \hat{3}\hat{I} + \hat{W}), \quad \hat{p}_2 = \sqrt{2} i (\hat{4}\hat{\Delta} + \hat{1}\hat{\Sigma} + \hat{3}\hat{J} + \hat{2}\hat{I} + \hat{\sigma}_2 \hat{W} \hat{\sigma}_2),$$

$$\hat{\square} = g^{kl} (i\nabla_k - A_k) (i\nabla_l - A_l) - m^2, \quad \hat{\Delta} \equiv \Delta + i\eta^j A_j, \quad \hat{\Sigma} \equiv \Sigma + i\ell^j A_j, \quad \hat{J} \equiv J + i m^j A_j, \quad \hat{I} \equiv I + i\bar{m}^j A_j, \quad \hat{W} = \hat{1}(\mu - \gamma) + \hat{2}(\tau - \beta) + \hat{3}(\alpha - \pi) + \hat{4}(\epsilon - \rho),$$

$$\hat{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{3} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{4} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для получения квадрированного уравнения Дирака-Фока используем следующее представление

$$\hat{\psi} = \hat{A}\hat{\varphi} \equiv \left[\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}_2 \hat{p}_1 \hat{\sigma}_2 \\ \hat{p}_2 & \hat{0} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} i\hat{\sigma}_2 & \hat{0} \\ \hat{0} & -i\hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \right] \hat{\Omega} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_* \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{B}_* \\ \hat{A} & \hat{A}_* \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Предположим, что оператор $\hat{\mathcal{H}}\hat{A}$ можно диагонализировать выбором матрицы $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{A} = \hat{\Omega}\hat{\mathcal{L}}, \quad (3)$$

где

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{L} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{L}_* \end{pmatrix} \equiv \hat{\square} - 2 \left\{ \begin{pmatrix} \hat{R} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{R}_* \end{pmatrix} \hat{\Sigma} + \begin{pmatrix} \hat{T} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{T}_* \end{pmatrix} \hat{\Delta} - \begin{pmatrix} \hat{K} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{K}_* \end{pmatrix} \hat{J} - \begin{pmatrix} \hat{N} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{N}_* \end{pmatrix} \hat{I} + \begin{pmatrix} \hat{P} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{P}_* \end{pmatrix} \right\},$$

$\hat{R}, \hat{T}, \hat{K}, \hat{N}, \hat{P}, \hat{R}_*, \hat{T}_*, \hat{K}_*, \hat{N}_*, \hat{P}_*$ - диагональные с-матрицы. Тогда интегрирование уравнения Дирака-Фока сведется к интегрированию скалярных уравнений

$$\hat{\mathcal{L}}\hat{\varphi} = 0.$$

Поставим задачу отыскать все пространства и электромагнитные поля, в которых условия (3) непротиворечивы, и, следовательно, квадрированное уравнение Дирака-Фока допускает диагонализацию. Отметим следующие обстоятельства. Во-первых, без потери общности достаточно ограничиться рассмотрением той части системы (3), в которой не содержатся матрицы со значком $*$. Во-вторых, решения системы (3) нужно проклассифици-

рывать по группе допустимых преобразований. В эту группу входят преобразования Лоренца и преобразования вида:

$$\hat{\Omega}' = \hat{\Omega} \hat{J}, \quad \hat{\mathcal{L}}' = \hat{J}^{-1} \hat{\mathcal{L}} \hat{J},$$

где \hat{J} - с-матрицы, $\hat{\mathcal{L}}'$ - диагональный оператор. Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо перечислить неэквивалентные относительно группы допустимых преобразований решения системы

$$\begin{aligned} \Delta \hat{B} + \hat{\Gamma}_n \hat{B} &= \hat{B} \hat{R} & \Delta \hat{Y} + \hat{\Gamma}_n \hat{Y} &= \hat{Y} \hat{R} \\ 2\Delta \hat{B} + \hat{\Gamma}_e \hat{B} &= \hat{B} \hat{T} & 2\Delta \hat{Y} + \hat{\Gamma}_e \hat{Y} &= \hat{Y} \hat{T} \\ \delta \hat{B} + \hat{\Gamma}_m \hat{B} &= \hat{B} \hat{N} & \delta \hat{Y} + \hat{\Gamma}_m \hat{Y} &= \hat{Y} \hat{K} \\ \bar{\delta} \hat{B} + \hat{\Gamma}_{\bar{m}} \hat{B} &= \hat{B} \hat{K} & \bar{\delta} \hat{Y} + \hat{\Gamma}_{\bar{m}} \hat{Y} &= \hat{Y} \hat{N} \\ \hat{W}_4 \hat{B} - 2i \hat{\Phi} \hat{B} + 2\hat{B} \hat{P} &= 0 & \hat{W}_4 \hat{Y} + 2i \hat{\Phi} \hat{Y} + 2\hat{Y} \hat{P} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\hat{W}_4 = (\gamma + \bar{\gamma} - \mu - \bar{\mu})\Delta + (\rho + \bar{\rho} - \varepsilon - \bar{\varepsilon})\Delta + (\pi - \bar{\pi} + \beta - \bar{\alpha})\bar{\delta} + (\pi - \bar{\pi} + \beta - \bar{\alpha})\bar{\delta} - \Delta\Delta - \Delta\Delta - \Delta\Delta + \delta\bar{\delta} + \bar{\delta}\delta - 2\{\hat{\Gamma}_n\Delta + \hat{\Gamma}_e\Delta - \hat{\Gamma}_m\bar{\delta} - \hat{\Gamma}_{\bar{m}}\bar{\delta} + \hat{\Gamma}[\Delta(\varepsilon - \rho) + \bar{\delta}(\tau - \beta) - (\beta - \tau)(\bar{\beta} - \bar{\tau}) + (\mu - \bar{\mu})(\varepsilon - \rho)] + 2[\bar{\delta}(\gamma - \mu) + \Delta(\pi - \alpha) + (\mu - \bar{\mu})(\pi - \alpha) - (\beta - \bar{\beta})(\pi - \alpha)] + 3[\Delta(\beta - \tau) + \delta(\rho - \varepsilon) + (\beta - \tau)(\varepsilon - \bar{\rho}) + (\alpha - \bar{\pi})(\varepsilon - \rho)] + 4[\Delta(\mu - \nu) + \delta(\kappa - \pi) - (\pi - \alpha)(\bar{\pi} - \bar{\alpha}) + (\gamma - \mu)(\bar{\gamma} - \bar{\mu})]\}$, $\hat{\Phi} = -\hat{\sigma}_3\varphi_1 - \hat{\sigma}_2\varphi_2 + \hat{\sigma}_1\varphi_3$, $\hat{\Gamma}_n = \hat{\sigma}_3\gamma + \hat{\sigma}_2\gamma - \hat{\sigma}_1\tau$, $\hat{\Gamma}_e = \hat{\sigma}_3\varepsilon + \hat{\sigma}_2\pi - \hat{\sigma}_1\kappa$, $\hat{\Gamma}_m = \hat{\sigma}_3\beta + \hat{\sigma}_2\mu - \hat{\sigma}_1\sigma$, $\hat{\Gamma}_{\bar{m}} = \hat{\sigma}_3\alpha + \hat{\sigma}_2\lambda - \hat{\sigma}_1\bar{\rho}$.

Опуская промежуточные расчеты, приведем окончательные результаты.

$$I. \quad k = \sigma = \rho = \tau = \varphi_0 = 0, \quad \hat{L} = \hat{\Pi} - 2\{\hat{\Gamma}_4\hat{\Delta} + \varepsilon\hat{\Delta} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\delta} + \Delta\varepsilon - \bar{\delta}\beta - \rho\bar{\beta} + \varepsilon(\mu - \gamma) - i\varphi_1\} + 4\{\bar{\gamma}\hat{\Delta} + \varepsilon\hat{\Delta} - \beta\bar{\delta} - \alpha\bar{\delta} + \Delta\varepsilon - \bar{\delta}\beta - \rho\bar{\beta} + \varepsilon(\mu - \gamma) - i\varphi_1\},$$

$$1) \hat{B} = \hat{1}, \quad \hat{Y} = \hat{2}.$$

$$2) \hat{B} = \hat{1}, \quad \hat{Y} = \hat{1}\Omega \sin \chi + \hat{2}\cos \chi, \quad \varphi_1 = \theta, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad \varphi_4 = -3\lambda.$$

Функция Ω удовлетворяет вполне интегрируемой системе уравнений

$$[\Delta\Omega + \Omega(\gamma - \bar{\gamma})] + [2\Delta\Omega + \Omega(\varepsilon - \bar{\varepsilon})] + [\delta\Omega + \Omega(\alpha - \beta)] + [\bar{\delta}\Omega + \Omega(\beta - \bar{\alpha})] \sin \chi = 0.$$

$$II. \quad k = \sigma = \rho = \tau = \pi = \lambda = \nu = \mu = \varphi_0 = \varphi_2 = 0$$

$$1) \hat{B} = \hat{1} + \hat{4}, \quad \hat{L} = \hat{\Pi} - 2\{\bar{\gamma}\hat{\Delta} + \varepsilon\hat{\Delta} - \alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\delta} + i\varphi_1\hat{\sigma}_3 + \hat{\Gamma}[\Delta\varepsilon - \bar{\delta}\beta - \rho\bar{\beta} - \varepsilon\bar{\gamma}] + 4[\delta\alpha - \Delta\gamma - \alpha\bar{\alpha} - \bar{\varepsilon}\gamma]\},$$

$$a) \hat{Y} = \hat{0}; \quad b) \hat{Y} = \hat{1}\chi_1 + \hat{4}\chi_2, \quad \varphi_1 = \theta; \quad в) \hat{Y} = \hat{2}\chi_1 + \hat{3}\chi_2, \quad \varphi_1 = i\theta.$$

Матрица \hat{Y} удовлетворяет вполне интегрируемой системе уравнений

$$\begin{aligned}\Delta \hat{Y} + \gamma \hat{\sigma}_3 \hat{Y} - \bar{\gamma} \hat{Y} \hat{\sigma}_3 &= \hat{O}, \\ \mathfrak{D} \hat{Y} + \varepsilon \hat{\sigma}_3 \hat{Y} - \bar{\varepsilon} \hat{Y} \hat{\sigma}_3 &= \hat{O}, \\ \delta \hat{Y} + \beta \hat{\sigma}_3 \hat{Y} - \bar{\alpha} \hat{Y} \hat{\sigma}_3 &= \hat{O}, \\ \bar{\delta} \hat{Y} + \alpha \hat{\sigma}_3 \hat{Y} - \bar{\beta} \hat{Y} \hat{\sigma}_3 &= \hat{O},\end{aligned}$$

$$2) \hat{B} = \hat{1}, \hat{L} = \hat{O} - 2\{\gamma \hat{\sigma} + \varepsilon \hat{\Delta} - \alpha \hat{\sigma} - \beta \hat{\sigma} - i \hat{\Phi}_1 + \Delta \varepsilon - \bar{\delta} \bar{\beta} - \beta \bar{\beta} - \varepsilon \bar{\gamma}\} \hat{1} + 2\{\bar{\gamma} \hat{\sigma} + \bar{\varepsilon} \hat{\Delta} - \bar{\beta} \hat{\sigma} - \bar{\alpha} \hat{\sigma} - i \bar{\Phi}_1 + \mathfrak{D} \bar{\gamma} - \delta \bar{\alpha} + \alpha \bar{\alpha} + \varepsilon \bar{\gamma}\} \hat{4},$$

$$a) \hat{Y} = \hat{4},$$

$$d) \hat{Y} = \hat{3} \Omega \sin \kappa + \hat{4} \cos \kappa, \quad \Phi_1 = \theta, \quad \Psi_3 = \Phi_{21}, \quad \Phi_{11} = -3\lambda, \\ \theta = \bar{\theta}, \quad \Omega = \bar{\Omega}, \quad \kappa = \bar{\kappa} = \text{const}.$$

Функция Ω удовлетворяет вполне интегрируемой системе

$$|\Omega \Omega - \Omega(\varepsilon + \bar{\varepsilon})| + |\Delta \Omega - \Omega(\gamma + \bar{\gamma})| + |\delta \Omega - \Omega(\alpha + \bar{\beta})| + |\bar{\delta} \Omega - \Omega(\alpha + \bar{\beta})| = 0.$$

Условия $\kappa = \sigma = \rho = \tau = \Phi = 0$ являются необходимыми и достаточными для диагонализации квадрированного уравнения Дирака-Фока, если в качестве вектора e^i тетрады выбрать главное световое направление тензора Вейля. Таким образом, диагонализация возможна только в алгебраически специальных пространствах.

В заключение рассмотрим диагонализацию уравнения Вейля, следующего из (I) при $\psi^A = m = 0$. Опуская доказательство, сформулируем

Утверждение: Уравнение Вейля допускает диагонализацию только в алгебраически специальных пространствах. При этом спинор ψ^A имеет представление $\hat{\psi} = (\hat{\sigma}_2 \hat{\Pi}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{Y} - i \sqrt{2} \hat{\gamma}) \hat{X}$

где I. $\hat{Y} = \hat{1} + \hat{4}$, $\nu = \kappa = \sigma = \lambda = \Psi_1 = \Psi_3 = 0$, $\hat{\gamma} = \hat{1} \rho - \hat{2} \pi + \hat{3} \tau - \hat{4} \mu$.

II. $\hat{Y} = \hat{1}$, $\kappa = \sigma = \Psi_1 = 0$, $\hat{\gamma} = \hat{1} \rho + \hat{3} \tau$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов В.П.// Труды ФИАН СССР, 1977. Т.96. С.73.
2. Алексеев Г.А., Хлебников В.И.// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1978. Т.9. Вып.5. С.790.
3. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. Мир. 1986.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

В.Вильяльба, Г.В.Шипилин

Белгосуниверситет имени В.И.Ленина (Минск)

"Свободные" решения волновых уравнений, т.е. уравнений в отсутствие полей играют важную роль, как с точки зрения понимания природы распространения волн различных типов и геометрий в пространстве, так и с точки зрения построений теории взаимодействий. Последняя, как известно, наиболее изящна, если она оперирует свободными плоскими волнами, полагая взаимодействие короткодействующим. Методически трудно принять за истинно свободные широко известные цилиндрические, сферические и другие типы волн, меняющие свою амплитуду с расстоянием: можно, правда, говорить об естественном ослаблении расходящихся цилиндрических либо сферических волн; но как примириться со "сверхестественным" усилением сходящихся волн — что за могущественный источник их порождает на бесконечности и заставляет сходиться по заданным конгруэнциям? В этом плане, если опереться на примитивное соответствие "свободная частица — свободная волна" и вспомнить, что свободная частица движется с сохранением импульса и энергии (т.е. направления и амплитуды в волновом понимании), то в качестве истинно свободной выступает единственно возможная плоская волна де Бройля, снискавшая себе всеобщее уважение за свое постоянное "свободолюбие".

Поэтому, вполне отдавая себе отчет в весьма условной свободе сложных в геометрическом отношении волн, мы представляем в данной работе точное решение уравнения Дирака в параболических цилиндрических координатах в отсутствие полей, т.е. "свободные" параболические цилиндрические спинорные волны.

Уравнение Дирака в параболических цилиндрических координатах

$$\chi = (m^2 - v^2)/2, \quad y = \mu v, \quad z, \quad t \quad (1)$$

можно записать в виде

$$\{h^{-1}(\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^\nu \partial_\nu) + \gamma^z \partial_z + m_0\} \bar{\psi} = 0, \quad h = (m^2 - v^2)^{1/2} \quad (2)$$

где γ — "плоские" матрицы Дирака.

Выполняя попарное разделение переменных, согласно методике, предложенной в [1],

$$а) \left\{ \left(\frac{\partial^4}{\partial \mu^4} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right) \gamma^3 \gamma^4 + k \right\} \bar{\psi} = 0, \quad б) \left\{ \gamma^4 \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + m_0 \gamma^3 \gamma^4 - k \right\} \bar{\psi} = 0, \quad (3)$$

где k — константа разделения, имеем

$$\bar{\psi} \sim \exp i(k_z z - Et). \quad (4)$$

Здесь k_z — z -компонента волнового вектора, E — энергия.

Тогда в стандартном представлении матриц Дирака

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \gamma^4 = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (5)$$

для разделения μ и ν переменных в уравнении (3а) необходимо подвергнуть его некоторому преобразованию подобия с помощью оператора

$$S = \{(\mu + k)^{1/2} + i \sigma^3 (k - \mu)^{1/2}\}^{1/2}. \quad (6)$$

В итоге зависимость биспинора $\bar{\psi}$ от μ и ν определяется уравнениями вырожденных гипергеометрических функций и оказывается возможным записать точное решение уравнения (1), которое ввиду громоздкости мы здесь не приводим.

Особенно изящна система уравнений, определяющая зависимость биспинора $\bar{\psi}$ от μ и ν переменных, в представлении

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Решения при этом снова записываются через гипергеометрические функции, а для структуры $\bar{\psi}$ в зависимости от μ переменной имеем

$$\bar{\psi} \sim \begin{pmatrix} (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) \\ (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 - i\varphi_1) \\ (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - i\varphi_1) \\ (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Аналогична структура $\bar{\psi}$ по ν переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шинкин Г.В., Андрушкевич И.Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех. 1985. № 3. С. 26; 1986. № 1. С. 6; 1986. № 2. С. 5; 1986. № 3. С. 3.

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В МАТРИЧНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Г.В.Шпикун, А.И.Тимошенко

Белгосуниверситет имени В.И.Ленина (Минск)

Если говорить о геометрическом аспекте современного этапа развития теоретической физики, то нет необходимости доказывать, сколь огромную роль играет наша убежденность в том, что физическое пространство-время четырёхмерно и обладает сигнатурой

$$Sign = diag(1, 1, 1, -1). \quad (I)$$

В частности, это может быть пространство Минковского, если мы строим теорию без учета гравитации, либо это пространство Римана (точнее псевдориманово пространство), если мы желаем последовательно учесть влияние гравитационного поля.

Заметим также, что не случайно даже в очень модных на сегодняшний день многомерных теориях большинство авторов уделяет специальное внимание обеспечению естественных возможностей редукций к реальному физическому четырехмерию [1]. Этого требует здравый смысл неумолимого принципа соответствия.

Обращаясь к дифференциальному аспекту современной теоретической физики, следует отметить, что уравнения движения подавляющего большинства сегодняшних реалистичных теорий представляют собой дифференциальные уравнения первого либо второго порядка (либо системы уравнений) в пространстве (I). Более того, представляется возможным записывать уравнения движения на языке систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2]. Заметим, что с системами дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка приходится иметь дело даже, если мы изучаем движение лишь одной частицы на квантовом уровне с учетом всего многообразия собственных характеристик частицы, связанных с собственной степенью свободы. В таком случае к четырехмерному многообразию известным образом подключается расслоение, и именно в расслоенном пространстве оказывается возможным учесть все физическое богатство собственного мира интересующего нас объекта. Систему дифференциальных уравнений, соот-

ветствующих такому слою, можно записать на языке одного эквивалентного матрично-дифференциального уравнения в пространстве (I) с алгеброй матриц, диктуемой физическим содержанием конкретного расслоения. Укажем, что и здесь оказывается возможным прийти к матрично дифференциальному уравнению первого порядка.

Таким образом, системы уравнений в частных производных первого порядка в пространствах (I) либо эквивалентные им матрично-дифференциальные уравнения первого порядка играют важнейшую роль в современной теоретической физике. Разработка методов точных решений таких уравнений с физических позиций представляет собой проблему первостепенной важности. Поскольку на сегодняшний день не существует сколь-либо универсальных методов решения систем уравнений в частных производных, проблема эта имеет важную роль и с позиций чистой математики.

Что касается одного дифференциального уравнения в частных производных, то к наиболее эффективным методам его решения следует отнести метод разделения переменных, предложенный еще в 1822 году Фурье для задачи теплопроводности [3] (метод Фурье). Успехи метода Фурье преопределены тем фактом, что уравнение в частных производных сводится в этом методе к хорошо изученным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Но даже для одного уравнения в частных производных наиболее общего вида развитие метода Фурье продолжается по сей день [4]. Естественно, что при изучении систем уравнений в частных производных усилия многих исследователей также сосредоточены на развитии методов разделения переменных.

Здесь мы рассматриваем некоторое наиболее общее матрично-дифференциальное уравнение первого порядка в пространстве (I)

$\hat{L} \hat{\Phi} = 0, \quad \hat{L} = \delta^{\lambda} (\partial_{\lambda} + \Gamma_{\lambda}), \quad \lambda = 1, 2, 3, 4 \quad (x, y, z, t), \quad (2)$
где δ^{λ} и Γ_{λ} — матрицы 4×4 , зависящие от x^{λ} .

При этом для (2) удается доказать следующую теорему:

Теорема I. Для того чтобы в уравнении (2) можно было разделить переменные x^{α} от x^{β} (α и β — собирательные индексы разделяемых переменных), необходимо и достаточно, чтобы оператор \hat{L} можно было представить в виде

$$\hat{L} = k (\hat{L}_{\alpha} + \hat{L}_{\beta}), \quad (3)$$

где \hat{L}_α и \hat{L}_β определяют зависимость неизвестной функции $\hat{\psi}$ (матрицы-столбца) от своих переменных и K — некоторая зависящая от x^λ матрица.

В случае конкретизации δ^λ и \sqrt{g} в (2), оперируя дополнительной информацией, можно конкретизировать операторы \hat{L}_α и \hat{L}_β , фигурирующие в (3). В частности, когда, например, речь идет об уравнении Дирака во внешних векторных либо гравитационных полях, для оператора \hat{L} в общих криволинейных координатах при нормальной калибровке тетрады имеем

$$\hat{L} = \sum_{\lambda} \delta^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - i A_\lambda \right) + m_0, \quad \hat{L} = \sum_{\lambda} \frac{x^\lambda}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \left(\partial_\lambda - \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{4 g_{\lambda\lambda}} \right) + m_0. \quad (4)$$

Здесь A_λ — вектор-потенциал, δ^λ — обобщенные коэффициенты Лама и $g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора, т.е.

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 - g_{44}(dx^4)^2. \quad (5)$$

Учитывая (4), теорему I удается переформулировать следующим образом:

Теорема 2. Для того чтобы в уравнении Дирака (уравнение (2) с оператором (4)) можно было разделить переменные x^α и x^β , необходимо и достаточно, чтобы оператор \hat{L} , либо ему эквивалентный можно было представить в виде суммы коммутирующих операторов

$$\hat{L} \rightarrow \hat{L}_\alpha + \hat{L}_\beta, \quad \hat{L}_\alpha \hat{L}_\beta - \hat{L}_\beta \hat{L}_\alpha = 0. \quad (6)$$

Теорема 2 является основой метода разделения переменных в уравнении Дирака, развиваемого в наших работах [5—8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Московского университета, 1987.
2. Федоров Ф.И. // Доклады АН СССР. 1952. Т. 82. С.37.
3. Fourier J.B. Analyse des equations determinees. Paris: 1831.
4. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Изд-во "Мир", 1981.
5. Шипкин Г.В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех. 1976. № 2. С. 22.
6. Шипкин Г.В. // Тезисы VII Всесоюзной конфер. по совр. проблемам геометрии. Минск. 1979. С. 231.
7. Шипкин Г.В. // Гравитация и электромагнетизм. Минск. Изд-во БГУ. 1981. С. 136.
8. Шипкин Г.В., Андрушкевич И.Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех. 1985. № 3. С. 26; 1986. № 1. С. 6; 1986. № 2. С. 5; 1986. № 3. С. 3.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

А.К.Горбачевич

Белгосуниверситет имени В.И.Ленина (Минск)

При нахождении и интерпретации точных решений уравнений Эйнштейна большую роль играют группы движений (см., напр., [1]). Более того, с изометриями пространства-времени тесно связан вопрос о законах сохранения в ОТО (см., напр., [2]). В частности, не последнюю роль играет подвижность пространства-времени при нахождении точных решений (особенно на уровне разделения переменных) уравнения Дирака во внешних гравитационных полях. В этой связи большой интерес представляет введение в явном виде операторов переноса (вернее их инфинитезимальных генераторов, которые в дальнейшем будем называть операторами обобщенного импульса) в квантовомеханические уравнения движения, построенные исходя из обобщенного уравнения Дирака.

Ранее нами было показано [3], что обобщенное уравнение Дирака в общем случае можно рассматривать как некоторое специальное (с неортономмированными базисными векторами) координатное представление обычных квантовомеханических уравнений движения в гильбертовом пространстве (\mathcal{H})

$$a) \frac{d|\Psi\rangle}{d\tau} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}|\Psi\rangle, \quad b) \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} \right)_{\text{expl}}, \quad (I)$$

которые для определенности мы записали в картине Шредингера. Здесь $|\Psi\rangle$ — нормированный на единицу вектор состояния, \mathcal{H} — оператор Гамильтона, \mathcal{L} — произвольный самосопряженный оператор, описывающий некоторую наблюдаемую L , τ — параметр, играющий роль времени, введение которого осуществляется посредством системы отсчета.

Для описания системы отсчета зададим конгруэнцию мировых линий тел отсчета $x^i = x^i(y^{(a)}, \tau)$, где $y^{(a)}$ — числа, обозначающие "номера" мировых линий тел отсчета; τ — непрерывный параметр, определенный вдоль каждой мировой линии.

Определим однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей $f(\tau): \tau(x) = \text{const}$. Каждой точке гиперповерхности f сопоставим четыре вектора из \mathcal{H}

$|\psi_\Lambda(y, \tau)\rangle$ ($\Lambda = 1, \dots, 4$), которые являются собственными векторами самосопряженного оператора координаты

$$Q^i |\psi_\Lambda(y, \tau)\rangle = x^i(y, \tau) |\psi_\Lambda(y, \tau)\rangle. \quad (2)$$

Из самосопряженности оператора Q^i следует, что векторы $|\psi_\Lambda(y, \tau)\rangle$ в общем случае удовлетворяют соотношению

$$\langle \psi_\Lambda(y, \tau) | \psi_{\Lambda'}(y', \tau) \rangle = G_{\Lambda\Lambda'}(y, \tau) \delta^{(3)}(y, y'), \quad (3)$$

где G — некоторая эрмитова матрица ($G^+ = G$), $\delta^{(3)}(y, y')$ — 3-мерная δ -функция Дирака

$$\delta^{(3)}(y, y') := \int \xi^i(y', \tau') n_i(y', \tau') \delta[x(y, \tau), x'(y', \tau')] d\tau'. \quad (4)$$

Здесь $\delta(x, x')$ — 4-мерная функция Дирака ($\int \delta(x, x') \sqrt{-g} d^4x = 1$),

$$\xi^i := \partial x^i(y, \tau) / \partial \tau, \quad n_i dy = df_i. \quad (5)$$

Под координатным представлением будем понимать такое представление, когда в качестве базисных векторов в \mathcal{H} используются векторы $|\psi_\Lambda(y, \tau)\rangle$. отождествляя биспинор ψ , входящий в общековариантное уравнение Дирака, с вектором состояния в координатном представлении, т.е. полагая $\psi = \langle \psi(y, \tau) | \psi \rangle$ (здесь и далее используется матричная форма записи), находим, что общековариантное уравнение Дирака эквивалентно уравнению (1a) в координатном представлении, если базисные векторы выбраны так, что эрмитова матрица G имеет следующий вид: $G = (i n_i) \gamma^i n_i \beta$ (подробнее см. [3]). Этот факт позволяет найти оператор Гамильтона в координатном представлении, как функцию некоторых дифференциальных операторов, действующих в пространстве представлений. С целью последующей физической интерпретации найденного таким образом оператора Гамильтона эти операторы выразим через генераторы инфинитезимальных перемещений вдоль гиперповерхностей $f(\tau)$.

Рассмотрим пространственноподобную конгруэнцию $x^i(\sigma)$ на гиперповерхности f , порождаемую векторным полем η . Под перемещением на f будем понимать такое преобразование, при котором каждая точка f смещается вдоль соответствующей линии конгруэнции на одно и то же параметрическое

расстояние δ . Очевидно, что оператор перемещения \mathcal{T}_η (он действует в Ψ_η) зависит от выбора векторного поля η и удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{T}_\eta(\delta_1) \mathcal{T}_\eta(\delta_2) = \mathcal{T}_\eta(\delta_2) \mathcal{T}_\eta(\delta_1) = \mathcal{T}_\eta(\delta_1 + \delta_2), \quad (6)$$

$$\mathcal{T}_\eta^+ \mathcal{T}_\eta = \mathcal{T}_\eta \mathcal{T}_\eta^+ = I. \quad (7)$$

В случае бесконечно малого переноса оператор \mathcal{T}_η принимает вид $\mathcal{T}_\eta(\delta\epsilon) = I - \frac{i}{\hbar} p_\eta \cdot \delta\epsilon$. Самосопряженный оператор p_η будем называть оператором обобщенного импульса. Найдем явный вид этого оператора в координатном представлении (\hat{p}_η).

Из очевидного равенства

$$\mathcal{T}_\eta(\delta\epsilon) Q^i \mathcal{T}_\eta^{-1}(\delta\epsilon) =: Q^i - \eta^i(Q) \delta\epsilon \quad (8)$$

следует

$$[p_\eta, Q^i] = \frac{\hbar}{i} \eta^i(Q). \quad (9)$$

Используя перестановочные соотношения (9) и определение 3-мерной δ -функции Дирака (4), находим

$$\hat{p}_\eta = \frac{\hbar}{i} \left\{ \eta^i \partial_i + \frac{1}{2} \eta^i{}_{,i} - \eta^i (\tilde{\mathfrak{K}}^+)^{}_{,i} (\tilde{\mathfrak{K}}^+)^{-1} \right\}, \quad (10)$$

где $\tilde{\mathfrak{K}} = \xi^i n_i \mathfrak{D}$, а матрица \mathfrak{D} есть решение алгебраического уравнения $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}^+ \mathfrak{D}$ (явный вид \mathfrak{D} приведен в [3]). Нетрудно убедиться, что найденный оператор удовлетворяет очевидным перестановочным соотношениям

$$[\hat{p}_\eta, \hat{p}_\xi] = \frac{\hbar}{i} \hat{p}_{[\eta, \xi]} \quad ([\eta, \xi] = \xi_\eta \xi - \xi_\xi \eta), \quad (11)$$

где η и ξ произвольные векторные поля на f ($\eta^i n_i = \xi^i n_i = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Д., Штефани Х., МакКаллум М., Херлт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
2. Мицкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И. Динамика полей в общей теории относительности. М., Энергоатомиздат, 1985.
3. Горбачевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Минск: Университетское, 1985.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЩЕКОВАРИАНТНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Р.И. Манкин

Педагогический институт (Таллин)

I. Рассмотрено скалярное волновое уравнение во внешнем гравитационном поле, описываемое метрическим тензором g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) риманова пространства-времени V^4 с сигнатурой $(+ - - -)$:

$$\hat{L} \varphi(x) := (g^{ik} \nabla_i \nabla_k + \xi R + m^2) \varphi(x) = f(x), \quad (I)$$

где ∇ - ковариантная производная, ξ - постоянная, m - масса скалярного поля и R - скалярная кривизна пространства-времени. В физических приложениях большое значение имеют фундаментальные решения G^\pm (функции Грина) уравнения (I). Хотя общая теория фундаментальных решений известна [1, 2], всё же точное вычисление их довольно сложная задача. Точные фундаментальные решения уравнения (I) известны в настоящее время только в некоторых частных случаях [1, 3]. Одна возможность изучения общего случая состоит в применении различных приближенных методов для определения [3, 4]. Запоздавающее (+) и опережающее фундаментальные решения уравнения (I) имеют вид [1]:

$$G^\pm(x, x') = (1/2\pi) [K(x, x') \delta^\pm(\sigma(x, x')) + V(x, x') H(\sigma(x, x'))], \quad (2)$$

где G^\pm , K , V - скаляры двух точек $x, x' \in V^4$, бискаляр $\sigma(x, x')$ - квадрат геодезического расстояния между точками x и x' ; $\text{supp } \delta^\pm(\sigma(x, x')) \subset C^\pm(x')$, где $C^+(x')$ и $C^-(x')$ являются соответственно изотропными конусами будущего и прошлого с вершинами в точке x' ; $\text{supp } H^\pm(\sigma(x, x')) \subset J^\pm(x')$, $J^\pm(x') = C^\pm(x') \cup D^\pm(x')$, где $D^\pm(x')$ определены как внутренности характеристических конусов $C^\pm(x')$.

Для полного описания фундаментального решения приходится ограничиться рассмотрением причинной области $\Omega \subset V^4$, в которой $\sigma(x, x')$ однозначная функция [1]. В области $\Omega \cap D^+(x')$ бискаляр $V(x, x')$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L} V(x, x') = 0 \quad (3)$$

и граничному условию на характеристическом конусе $\sigma(x, x') = 0$:

$$2 g^{ik} \nabla_i \sigma \nabla_k V + (g^{ik} \nabla_i \nabla_k \sigma - 4) V = -\hat{L} K. \quad (4)$$

Известно, что функция $K(x, x')$ имеет вид

$$K(x, x') = (g(x) g(x'))^{-1/4} (D(x, x'))^{1/2},$$

где $g(x)$ — определитель метрического тензора в точке x и $D(x, x')$ — так называемый определитель Ван Флека [1, 2].

Найти решение уравнения (3) в замкнутом виде удается только в исключительных случаях, например, для пространства постоянной кривизны [1].

2. Если выполняется условие

$$(\hat{L} - m^2) K = \alpha K \Phi(\sigma) + \gamma K, \quad \Phi(0) = 0, \quad (5)$$

где α — малый параметр, γ — произвольная постоянная и $\Phi(\sigma)$ — ограниченная функция при $x, x' \in \Omega$, то решение уравнения (3) можно искать в виде ряда по степеням α :

$$V(x, x') = K(x, x') [A_0(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n A_n(\sigma)], \quad (6)$$

причем в силу

$$2 g^{ik} \nabla_i \sigma \nabla_k K + (g^{ik} \nabla_i \nabla_k \sigma - 8) K = 0, \quad (7)$$

условие (4) принимает вид

$$V|_{\sigma=0} = -(\beta^2/4) K|_{\sigma=0}, \quad \beta^2 = m^2 + \gamma. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (3) и учитывая соотношение (7), получаем уравнение для функции $A_0(\sigma)$:

$$\sigma \ddot{A}_0 + 2 \dot{A}_0 + (\beta^2/4) A_0 = 0, \quad \dot{A}_0 := dA_0/d\sigma. \quad (9)$$

Из (8) следует граничное условие

$$A_0(0) = -\beta^2/4. \quad (10)$$

Для остальных функций $A_n(\sigma)$ подстановка (6) в (3) дает рекуррентные уравнения

$$\sigma \ddot{A}_n + 2 \dot{A}_n + (\beta^2/4) A_n = - (1/4) \Phi(\sigma) A_{n-1}, \quad (11)$$

с граничными условиями

$$A_n(0) = 0, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что решение задачи (9) - (12) имеет вид

$$A_0 = -(\beta^2/2z) J_1(z),$$

$$A_n = (\pi/2\beta^2 z) \left[J_1(z) \int_0^z t^2 A_{n-1}(t) \phi(t^2/\beta^2) Y_1(t) dt - \right. \\ \left. - Y_1(z) \int_0^z t^2 A_{n-1}(t) \phi(t^2/\beta^2) J_1(t) dt \right], \quad (13)$$

где $J_1(z)$, $Y_1(z)$ являются соответственно функциями Бесселя первого и второго рода и введено обозначение $z = \beta \sigma^{1/2}$.

Равенства (13) и решают поставленную задачу. В случае $\alpha = 0$ функция имеет особенно простую структуру:

$$V(x, x') = -K(x, x') (\beta^2/2z) J_1(z). \quad (14)$$

При этом метрика пространства V^4 должна удовлетворять уравнению

$$(\hat{L} - m^2)K = \gamma K, \quad x, x' \in \Omega. \quad (15)$$

Равенство (15) выполняется, например, при метрике плоского пространства-времени ($\gamma = 0$), при метрике плоской гравитационной волны ($\gamma = 0$) и метрике Робертсона-Уокера (статический случай), $\gamma = \pm(1-6\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedlander F.G. The wave equation on a curved space-time. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.
2. De Witt B.C., Brehme R.W. // Ann. Phys., 1960. Vol. 9. P. 220.
3. John R.W. // Astron. Nachr., 1987. Bd. 308. S. 9.
4. Манкин Р.И. // Известия АН ЭССР. 1983. Т. 32. С. 351.

О ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА-ЯНГА-МИЛЛСА-ХИГГСА И ЭЙНШТЕЙНА-ХИГГСА

Д. В. Гальцов, Э. Масар

Московский государственный университет (Москва)

Калибровочные теории Великого объединения, основанные на механизме Хиггса спонтанного нарушения калибровочной симметрии, предсказывают возможность образования в процессе фазовых переходов в ранней Вселенной одномерных топологических дефектов структуры фоновых (вакуумных) скалярного и векторного полей в виде космических струн с массой на единицу длины порядка массы объединения [1]. В последнее время гипотеза космических струн привлекла большое внимание как возможная основа теории происхождения структур во Вселенной [2-3]. В связи с этим возникает вопрос о гравитационном поле космической струны. Анализу самогравитирующих решений, описывающих космические струны, посвящено пока сравнительно мало работ (см., например, [4-5]). Точные решения систем уравнений калибровочных полей и уравнений Эйнштейна, обладающих цилиндрической симметрией построить не удается, однако для струн, возникающих в теории с локально нарушенной симметрией удастся показать, что пространство-время имеет асимптотически коническую структуру на больших расстояниях от струны. В случае же "глобальных" струн, возникающих в калибровочных теориях с нарушением глобальной симметрии, ситуация менее определена [5]. В связи с этим был проведен анализ цилиндрически симметричных решений в калибровочной модели $U(1)$ с самосогласованным учетом гравитации, в которой единым образом можно исследовать как локальные, так и глобальные струны. Лагранжиан теории:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \right] \quad (1)$$

где $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $V(\phi^* \phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi - \eta^2)^2$, $\lambda > 0$

ϕ - комплексное скалярное поле, A_μ - векторное (калибровочное) поле. В общем виде этот лагранжиан соответствует теории с локальной, спонтанно нарушенной симметрией $U(1)$. Переход к теории с глобальной симметрией осуществляется исключением векторного поля $A_\mu = 0$.

Цилиндрически симметричную метрику выбираем в виде

$$ds^2 = e^\alpha dt^2 - e^{\gamma-\alpha} (d\rho^2 + dz^2) - e^{-\alpha} f^2 d\varphi^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2)$$

где α , γ , f - функции радиальной координаты ρ . Нетривиальные компоненты тензора Эйнштейна удобно представить в виде

$$f(G_t^t - G_z^z) = [(\alpha' - \gamma'/2)f]' \exp(\alpha - \gamma) \quad (3)$$

$$f(G_\rho^\rho + G_z^z) = -f'' \exp(\alpha - \gamma) \quad (4)$$

$$2f(G_\rho^\rho + G_\varphi^\varphi) = -(fr')' \exp(\alpha - \gamma) \quad (5)$$

$$G_\rho^\rho = (\alpha'^2/4 - f'\gamma'/2f) \exp(\alpha - \gamma) \quad (6)$$

где штрихом обозначены производные по ρ .

Рассмотрим струнное решение с наименьшим топологическим зарядом, параметризуемое двумя вещественными функциями R, F

$$\Phi = R(\rho) e^{i\varphi}, \quad A_\mu = e^{-1} [F(\rho) - 1] \gamma_\mu \varphi \quad (7)$$

удовлетворяющими граничным условиям

$$\begin{matrix} R \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} F \rightarrow 1 \\ \rho \rightarrow 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty \end{matrix}, \quad \begin{matrix} F \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty \end{matrix} \quad (8)$$

Тензор энергии-импульса имеет диагональный вид, причем

$$\begin{aligned} T_t^t &= T_z^z = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ T_\rho^\rho &= -T_1 - T_2 + T_3 + T_4; \quad T_\varphi^\varphi = -T_1 + T_2 - T_3 + T_4 \end{aligned} \quad (9)$$

где $T_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{F'}{ef} \right)^2 e^{2\alpha - \gamma}$; $T_2 = e^{\alpha - \gamma} R'^2$; $T_3 = e^{\alpha} \left(\frac{RF}{f} \right)^2$; $T_4 = \frac{\lambda}{2} (R^2 - z^2)^2$

Переход к глобальной струне осуществляется, если положить $F = 1$. Система материальных уравнений для F и R :

$$\begin{aligned} f(e^\alpha F'/f)' &= 2e^2 e^\gamma F R^2 \\ f(fr')' &= \lambda f^2 R e^{\gamma - \alpha} (R^2 - z^2) + e^\gamma R F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

и для ее замыкания необходимо записать уравнения Эйнштейна, связывающие (3)-(6) с (9).

Вблизи оси симметрии уравнения Эйнштейна для локальной и глобальной струны совпадают. Можно показать, что метрика струны (локальной и глобальной) будет регулярна на оси сим-

метрии (т.е. $g_{\varphi\varphi} \rightarrow \varphi^2$, g_{tt} и $g_{\varphi\varphi}$ ограничены при $\varphi \rightarrow 0$) тогда и только тогда, когда она плоская на оси симметрии, причем всюду в области изменения φ должно выполняться соотношение

$$\eta(\varphi) = 2\alpha(\varphi) \quad (II)$$

Анализируя с учетом (II) и (8) уравнения Эйнштейна в асимптотической области, отдельно для случая локальной и глобальной струны, можно показать, что в обоих случаях α асимптотически принимает постоянное значение, которое всегда может быть выбрано нулевым, причем для f получаем асимптотическое выражение вида

$$f \sim b\varphi + c \quad \text{при } \varphi \rightarrow \infty \quad (I2)$$

где b и c - постоянные параметры.

Учитывая (II) и (I2) из уравнения Эйнштейна для G_t^t получаем соотношение

$$b = 1 - 4G_\mu - \int_0^\infty e^{-\alpha} f \frac{\alpha'^2}{4} d\varphi \quad (I3)$$

где $\mu = 2\pi \int_0^\infty T_t^t f d\varphi$ представляет собой плотность энергии струны на единицу длины, определяемую как интеграл от T_t^t по двумерной поверхности $t = \text{const}$, $z = \text{const}$.

Величина b характеризует коническую структуру пространства-времени на бесконечности. Соотношение (I3) уточняет результат [5] и распространяет его на случай глобальной струны.

Для астрофизических приложений достаточно приближение локально плоского конического пространства

$$ds^2 = dt^2 - d\varphi^2 - dz^2 - (1 - 4G_\mu)^2 \varphi^2 d\varphi^2$$

Нами исследовано движение пробных частиц в асимптотически конических пространствах, описывающих струны в гравитирующих системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kibble T.W.B. // Journ. of Phys. A. 1976. V.9. P.1387
2. Vilenkin A. // Phys. Rep. 1985. V.121. P.263
3. Brandenberger R.H. DAMPT preprint 1987
4. Garfinkle D. // Phys. Rev. D. 1985. V.32. P.1323
5. Gregory R. DAMPT preprint 1987

МНОГОМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

В.Р.Гаврилов

Физический факультет МГУ (Москва)

Не опираясь непосредственно на принцип калибровочной симметрии и используя риманово многообразие размерности, большей четырех, удастся объединить калибровочное и гравитационное взаимодействия в единую геометрическую схему [1 - 5]. Как правило, все теории подобного рода используют гипотезу о компактности физического пространства-времени по дополнительным измерениям с чрезвычайно малым характерным масштабом компактификации / порядка 10^{-33} см. /, что согласуется с ненаблюдаемостью дополнительных размерностей в обычном смысле. Процедура усреднения по зависимостям от дополнительных координат / размерная редукция / позволяет из исходных многомерных выражений получить стандартные 4-мерные лагранжианы.

В серии работ [1 - 3] развиваются многомерные теории с топологией $M^4 \times S^1 \times S^1 \times S^1$, объединяющие гравитационное взаимодействие с электрослабыми и электросильными. При этом, как правило, приходится выходить за рамки римановой геометрии / использовать геометрию с кручением, либо комплексифицированную метрику /.

Однако можно получить неабелеву структуру калибровочных взаимодействий оставаясь в рамках римановой геометрии [5], если использовать внутреннее пространство более сложной топологии, а именно $M^4 \times S^2 \times S^1$. При этом расщепление и размерная редукция скалярной кривизны ${}^{\sharp}R$ приводят к лагранжиану системы из гравитационного поля и $SU(2) \times U(1)$ -симметричных полей Янга-Миллса. Группа калибровочной симметрии соответствует группе изометрий метрики внутреннего пространства.

Аналогично работам [1 - 3] осуществляется генерация масс калибровочных полей. Конформное преобразование, нарушающее исходную $SU(2) \times U(1)$ -симметрию метрики внутреннего пространства, приводит к появлению конформно-выделенных слагаемых, которые после размерной редукции образуют массовые вклады калибровочных полей и члены взаимодействия скалярного поля Хиггса с ними. При этом конформный фактор χ разлагается в ряд по гармоническим функциям, коэффициенты которого подбираются соответствующим образом.

Как и во всех теориях подобного рода фермионное поле Ψ вводится в геометрию извне добавлением к лагранжиану бозонных полей слагаемого $i \kappa^q \bar{\Psi} \Gamma A D_A \Psi$. Его расщепление и размерная редукция позволяют получить стандартный лагранжиан фермионного сектора модели Вайнберга-Салама, включающий члены взаимодействия с хиггсовским и векторными полями, а также массовые слагаемые. Последние обязаны своим происхождением множителю κ^q в исходном многомерном выражении. Без него фермионы остались бы безмассовыми. Примечательно, что в данной модели проблемы планковских масс не возникает. Волновые функции известных частиц / их левые и правые компоненты / выделяются должным образом из 8-компонентного спинора в 7-мерном многообразии.

Радиусы сферы R и окружности r внутреннего пространства S^2 и S^1 оказываются связанными соответственно с константами q и q' модели Вайнберга-Салама [6] и эйнштейновской гравитационной постоянной :

$$q^2 = \frac{3}{2} \frac{16\pi G}{R} \quad (q')^2 = \frac{16\pi G}{r}$$

и представляют собой длины порядка планковских.

Таким образом, изложенная схема позволяет на основе римановой геометрии 7-мерного многообразия с топологической структурой в виде прямого произведения $M^4 \times S^2 \times S^1$ объединить лагранжианы гравитации и стандартной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1987. - 215 с.
2. Владимиров Ю.С. 6-мерное объединение теории Калуцы-Клейна и модели Вайнберга-Салама. Препринт физич. ф-та МГУ, 1985, № 16/1985, 4 с.
3. Владимиров Ю.С., Мирошник А.О. $SU(2) \times U(1)$ -симметричная 7-мерная модель гравито-электро-слабых взаимодействий с метрическим определением бозонов. Препринт физич. ф-та МГУ, 1987, № 25/1987, 4 с.
4. Кислов В.В., Таранов И.В. Сб. "Гравитация и электромагнетизм", Минск, Изд-во БГУ, с. 36-40, 1987.
5. Ходос А. УФН, том 146, вып. 4, с. 647-654, 1985.
6. Калибровочные поля / А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский и др. - М.: Изд-во МГУ, 1986. 260 с.

НЕИЗБЕЖНОСТЬ ВРЕМЕННОЙ ВАРИАЦИИ НЬЮТОНОВСКОЙ ПОСТОЯННОЙ В ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН

В.Д.Ивашук, В.Н.Мельников

ВНИИПВ (Москва)

I. Высказанная в 1937г. Дираком идея о возможности временной вариации ньютоновской постоянной G [1] получила естественную реализацию в работе [2] в рамках 10-мерной $SO(32)$,

$E_8 \times E_8$ -супергравитации [3] с лоренцевым членом Черна-Саймона [4] и членом Гаусса-Бонне, имеющими суперструнное происхождение [5].

Действие рассматриваемой модели имеет следующий вид [2]:

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 R - \frac{3}{4} \dot{x}^2 \phi^{-3/2} H_{MNP}^2 - \right. \\ \left. - \frac{9}{16} \dot{x}^2 (\phi^{-1} \partial_M \phi)^2 - \frac{1}{4} \phi^{-3/4} \left[\frac{1}{30} \text{tr} F_{MN}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (R_{MNPQ}^2 - 4 R_{MN}^2 + R^2) \right] \right\} + S_F. \quad (I)$$

В (I) g_{MN} -метрика, ϕ -дилатонное поле, F_{MN} -напряженность калибровочного поля A_M , принимающего значение в $ad \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = SO(32)$, $e_8 \oplus e_8$; H_{MNP} -антисимметричный тензор:

$$H = \frac{1}{3!} H_{MNP} dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P = dB - \omega_{3Y} + \omega_{3L}. \quad (2)$$

В (2) B -2-форма, $\omega_{3Y} = \frac{1}{30} \text{tr}(A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A)$ -янг-миллсовская 3-форма Черна-Саймона, $\omega_{3L} = \text{tr}(\omega \wedge \Omega - \frac{1}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega)$ -лоренцевская 3-форма Черна-Саймона, где ω -спиновая связность, отвечающая некоторому реперу, диагонализующему метрику, $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$.

2. Рассмотрим десятимерное многообразие

$$M^{10} = \mathbb{R} \times M_K^3 \times K, \quad (3)$$

где $M_K^3 = S^3, \mathbb{R}^3, L^3$ при $K=1,0,-1$ соответственно, а K -многообразие Калаби-Яо [6]. Пусть тензор-энергии-импульса имеет вид:

$$T = T_{MN} dx^M \otimes dx^N = \rho(t) dt \otimes dt + p_3(t) g^{(3)} + p_6(t) g^{(6)}, \quad (4)$$

где $g^{(3)}$ -каноническая метрика на M_K^3 , $g^{(6)}$ -метрика на K . Действие (I), источник (4) и анзац:

$$g^{(10)} = -dt \otimes dt + a_3^2(t) g^{(3)} + a_6^2(t) g^{(6)}, \quad (5)$$

$$H = 0, \quad (6)$$

$$\Phi = \Phi(t), \quad (7)$$

$$A = ad(i(w^{(6)})), \quad (8)$$

порождают космологическую модель "Фридмана-Калаби-Яо". В (8) $w^{(6)}$ -спиновая связность на K , $i: SO(6) \rightarrow \mathfrak{q}$ -вложение алгебры $SO(6)$. Нетрудно доказать существование B , такого, что $H=0$.

Уравнения движения, отвечающие действию (1) и источнику (4) в подстановке (5-8) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$3a_3^{-2}(\kappa + \dot{a}_3^2) = (9/16)\Phi^{-2}\dot{\Phi}^2 + \kappa^2\rho + A_6, \quad (5a)$$

$$a_3^{-2}(\kappa + \dot{a}_3^2 + 2a_3\ddot{a}_3) = -(9/16)\Phi^{-2}\dot{\Phi}^2 - \kappa^2 p_3 + B_6, \quad (5b)$$

$$a_3^{-2}(\kappa + \dot{a}_3^2 + a_3\ddot{a}_3) = -(3/16)\Phi^{-2}\dot{\Phi}^2 - (1/3)p_6 - 2\kappa^2\Phi^{-3/4}a_3^{-3}\ddot{a}_3(\kappa + \dot{a}_3^2) + C_6, \quad (5в)$$

$$\ddot{\Phi} - \Phi^{-1}\dot{\Phi}^2 + 3a_3^{-1}\dot{a}_3\dot{\Phi} + 4\Phi^{1/4}\kappa^2a_3^{-3}\ddot{a}_3(\kappa + \dot{a}_3^2) + D_6 = 0, \quad (7a)$$

где A_6, B_6, C_6, D_6 обращаются в 0 при $a_6(t) \equiv \text{const}$.

3. В работе [2] рассматривался частный случай $\kappa = -1$, $p_3 = p_6 = 0$, $\Phi(t) = \text{const}$. В этом случае авторам [2] удалось найти асимптотику \dot{a}_6/a_6 при $t \rightarrow \infty$, и как следствие оценить вариацию \dot{G}/G в современную эпоху:

$$\dot{G}/G \approx -1 \times 10^{-11 \pm 1} \text{ уг}^{-1}$$

В общем случае система уравнений (5a-в), (7a) замыкается двумя уравнениями состояния десятимерной материи:

$$F_i(t; \rho, p_3, p_6) = 0, \quad i=1, 2. \quad (9)$$

Естественно требовать, что

$$\rho > 0, \quad p_3 \geq 0. \quad (10)$$

Возникает вопрос: существуют ли такие состояния материи (9), при которых реализуется космологическое решение с $a_6(t) = \text{const}$? Нами получен отрицательный ответ на этот вопрос: при наличии ограничений (10), ни при каких уравнениях состояния (9) не существует решения (5a-в), (7a) с $a_6(t) = \text{const}$.

Поскольку, как легко убедиться из (1),

$$G = \text{const } \alpha^2 a_6^{-6},$$

то тем самым доказана неизбежность временной вариации G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M.// Nature (London). 1937. Vol.139. P.323.
2. Wu Y.-S., Wang Z.// Phys.Rev.Lett. 1986. Vol.57. P.1978.
3. Chapline G.F., Manton N.S.// Phys.Lett. 1983. Vol.120B. P.105.
4. Green M.B., Schwarz J.H.// Phys.Lett. 1984. Vol.149B. P.117.
5. Metsaev R.R., Tseytein A.A.// Phys.Lett. 1987. Vol.185B. P.52.
6. Candelas P. et al. // Nucl. Phys. 1985. Vol.256B. P.46.

ЧАСТИЦЫ, СТРУНЫ, МЕМБРАНЫ И ГРАВИТАЦИЯ

П. Куус

Институт физики АН ЭССР (Тарту)

1. Теорию бозонной струны и теорию гравитации Эйнштейна можно рассматривать как два члена в ряду теорий, описывающих движение n -мерных объектов в D -мерном пространстве-времени при помощи действий, имеющих определенный геометрический смысл:

$$\begin{aligned} n=0 & \quad - \text{частица с массой } \mu, & S &= -\mu \int ds, \\ n=1 & \quad - \text{бозонная струна}, & S &= \int d^2\sigma \sqrt{-g^{(2)}}, \\ n=2 & \quad - \text{мембрана}, & S &= \int d^3z \sqrt{-g^{(3)}}, \\ n=3, D=4 & \quad - \text{пространственноподобные} & S &= \int d^4x R \sqrt{-g^{(4)}}. \\ & \quad \text{гиперповерхности (теория} \\ & \quad \text{Эйнштейна в формализме АДМ).} \end{aligned}$$

Все эти теории можно привести к виду $(n+1)$ -мерных теорий поля:

$$\begin{aligned} n=0: & \quad S = -\frac{1}{2} \int dt \{ V^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} + V \mu^2 \}, \\ n=1: & \quad S = \int d^2\sigma \sqrt{-g^{(2)}} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}, \\ n=2: & \quad S = \int d^3z \sqrt{-g^{(3)}} \{ g^{\mu\nu} \partial_\mu Y^\alpha \partial_\nu Y^\beta \eta_{\alpha\beta} - 1 \}, \\ n=3; D=4: & \quad S = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R(g^{(4)}). \end{aligned}$$

Здесь $\mu, \nu = 1, \dots, D$ и $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского в D -мерном пространстве-времени. В первых трех действиях введены $(n+1)$ -мерные метрики V^{-1} , g^{ij} , $g^{\mu\nu}$ как вспомогательные независимые переменные. Геометрическое происхождение действий теперь выражается в том, что все они общековариантны в $(n+1)$ -мерном пространстве-времени своих координат. Следовательно, при переходе к гамильтоновой формулировке мы получим во всех случаях исчезающий гамильтониан и $(n+1)$ связей H_A , входящие в действие с множителями Лагранжа N^A :

$$S = \int d^{n+1}x (p\dot{q} - N^A H_A), \quad A = 1, \dots, n+1.$$

Имеем:

$$n=0: \quad q^\mu = x^\mu, \quad p_\mu = V^{-1} \dot{x}^\mu \eta_{\mu\nu}, \quad N = V, \quad H = \frac{1}{2} (p_\mu p^\mu - \mu^2);$$

$$n=1: q_1^m = x^m, \quad P_m = \sqrt{-g} (g^{00} \partial_0 x^m + g^{01} \partial_1 x^m) \eta_{nm}, \\ N^0 = \frac{1}{\sqrt{-g} g^{00}}, \quad N^1 = -\frac{g^{01}}{g^{00}},$$

$$H_0 = \frac{1}{2} (P^m P_m + \partial_i x^m \partial_i x_m), \quad H_1 = P^m \partial_i x_m.$$

При $n=2$ соответствующие выражения даны, например, в обзор [1,2]. При $n=3$ получим известный формализм АДМ [3].

В итоге мы можем исследовать бозонную струну методами, выработанными в рамках формализма АДМ для теории гравитации Эйнштейна, и наоборот. Такое сравнительное исследование в наиболее красивом виде проведено Тейтелбоймом [4].

2. Если мы переходим к соответствующим суперобъектам, все эти наглядные геометрические картины исчезают. В спинорной части суперпространства нельзя ввести метрику непротиворечивым образом и, следовательно, там понятие n -мерного объема не определено. Поэтому невозможно обобщать действия бозонных объектов на случай суперобъектов исходя из их геометрического смысла (экстремальная длина, поверхность, объем). Нужны какие-то иные принципы, пригодные для обобщения действий в виде $(n+1)$ -мерных полевых теорий. Оказывается, что такие обобщения далеко не однозначны. Для суперчастицы, например, предложены действие Бринка - Шварца [5], действие Зигеля [6] и действие Баталина - Каллош - Ван Пройена [7]. Для суперструны имеем действия Грина - Шварца [8] и Зигеля [9], для супермембраны - действие Бергсхоффа - Сезгина - Таунсенда [10]. Все они имеют свои преимущества, но у всех них структура связей достаточно сложна и имеет по меньшей мере один из следующих недостатков: а/ разделение связей первого и второго рода не является ковариантным относительно преобразований Лоренца; связи второго рода порождают скобки Дирака, имеющие очень громоздкий вид; б/ калибровку относительно локальной κ -суперсимметрии нельзя фиксировать Лоренц-ковариантно; в/ связи первого рода не являются независимыми, систему независимых связей нельзя выделить Лоренц-ковариантно.

В отличие от этого, при обобщении теории гравитации Эйнштейна к $N=1, D=4$ супергравитации никаких принципиальных трудностей не возникает. Требование локальной κ -суперсимметрии (в данном случае это тросто суперсимметрия между гра-

витоном и гравитино) практически однозначно фиксирует действие. В нем сохраняется каноническая структура теории Эйнштейна, к которой добавляется фермионная связь S , генерирующая суперсимметрию [11].

Наиболее обнадеживающим подходом к изучению суперчастиц является недавно предложенное гармоническое пространство нового типа [12,13]. Перечисленные выше трудности в нем преодолеваются ценой введения дополнительных степеней свободы в виде внутреннего пространства с группой симметрии $H = SO(8) \times SO(1,1) \subset SO(4,9) = G$. При помощи гармонических переменных можно перейти от величин ковариантных по отношению к G к величинам ковариантным по отношению к H , не нарушая при этом G -ковариантности. В наиболее простой конструкции, например, используются гармонические переменные $\nu_{\alpha}^{\dot{\alpha}}$, $\nu_{\dot{\alpha}}^{\alpha}$, где $\alpha = 1, \dots, 16$ — $SO(1,9)$ спинорные индексы и $\dot{\alpha} = 1, \dots, 8$ — $SO(8)$ спинорные индексы. Теперь каждому $SO(4,9)$ спинору θ^{α} можно сопоставить восьмикомпонентные величины $\theta^{\alpha} \nu_{\alpha}^{\dot{\alpha}}$, $\theta^{\dot{\alpha}} \nu_{\dot{\alpha}}^{\alpha}$, являющиеся $SO(4,9)$ -скалярами и $SO(8)$ -спинорами.

Непротиворечивое применение нового подхода к теории суперструн и супермембран пока отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Henneaux M. // Phys. Repts. 1985. V. 126. P. 1.
2. Фрадкина Т. // Труды ФИАН. 1986. Т. 167. С. 180.
3. Arnowitt R., Deser S., Misner C. // Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten. New York: Wiley, 1962. P. 227.
4. Teitelboim C. // Quantum Theory of Gravity. Essays in Honour of B. DeWitt, ed. S. Christensen. Bristol: A. Hilger, 1983. P. 327.
5. Brink L., Schwarz J. // Phys. Lett. B. 1981. V. 100B. P. 310.
6. Siegel W. // Class. Quant. Grav. 1985. V. 2. P. 195.
7. Batalin I., Kallosh R., van Proeyen A. // Preprint KUL-TR-87/17 (1987).
8. Green M., Schwarz J. // Nucl. Phys. B. 1984. V. B243. P. 285.
9. Siegel W. // Nucl. Phys. B. 1985. V. B263. P. 93.
10. Bergshoeff E., Sezgin E., Townsend P.K. // Phys. Lett. B. 1987. V. 189. P. 75.
11. Deser S., Kay J.H., Stelle K.S. // Phys. Rev. D. 1977. V. D16. P. 2448.
12. Sokatchev E. // Phys. Lett. B. 1986. V. 169. P. 209; Class. Quant. Grav. 1987. V. 4. P. 237.
13. Nissimov E.R., Pacheva S.J. // Phys. Lett. B. 1987. V. 189. P. 57; Preprints WIS 87/28, 87/43, 87/44 (1987).

УРАВНЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Р.-К.Р. Лойде, П.А. Суурварик

Таллинский политехнический институт (Таллин)

Исходя из массивного суперполевого уравнения движения для суперспина $3/2$ [1,2], рассмотрим безмассовое уравнение

$$\square \begin{vmatrix} E_{11}^{3/2} - \frac{2}{3} E_{11}^0 & a E_{12}^0 \\ b E_{21}^0 & c E_{22}^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (I)$$

где $\psi_1^r = k^r$ - векторное суперполе, $\psi_2 = \phi$ - скалярное суперполе, E_{ij}^y - суперпроекторы.

Привлечение дополнительного скалярного суперполя ϕ для суперспина позволяет вывести калибровочное преобразование и ограничение на источник прямо из уравнения (I). Запишем уравнение (I) в виде $\pi \tilde{\psi} = 0$, тогда инвариантность при калибровочном преобразовании $\delta \tilde{\psi} = Q^z \tilde{\epsilon}$ следует из операторного равенства $\pi Q^z = 0$. В случае уравнения с источником $\pi \tilde{\psi} = \tilde{j}$ ограничение на источник $Q^z \tilde{j} = 0$ вытекает из равенства $Q^z \pi = 0$. Общие калибровочное преобразование запишется в виде [3]

$$\delta \psi_1 = \alpha E_{13} \epsilon_3, \quad \delta \psi_2 = \beta E_{23} \epsilon_3, \quad (2)$$

где ϵ_3 биспинорное суперполе. E_{13} и E_{23} являются линейными комбинациями суперпроекторов E_{13}^y и E_{23}^y . Уравнение (I) калибровочно инвариантно тогда и только тогда, когда a , b и c ограничены условием

$$ab = -\frac{2}{3}c \quad (3)$$

и $\alpha = \frac{3}{2}a\beta$. Ограничение на источник $Q^z \tilde{j} = 0$ дается оператором

$$Q^z = |\gamma E_{31} \delta E_{32}|, \quad (4)$$

где E_{31} , E_{32} выражаются через E_{31}^y и E_{32}^y , и $\gamma = \frac{3}{2}b\delta$.

Исходя из аналогии с обычными калибровочными полями, где калибровочное преобразование и ограничение на источник линейны по производным, требуем, чтобы калибровочное преобразование (2) и ограничение на источник являлись линейными по ковариантным спинорным производным D_α . Это определяет

однозначно вид операторов E_{13} , E_{23} , E_{31} и E_{32} .

В итоге получим следующее суперполевое уравнение [3]
($b = -a = 3/2$)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}[\square + \frac{1}{4}(\bar{D}D)^2]h^r - \frac{2}{3}\partial^r\partial_\varphi h^s - \frac{1}{6}\varepsilon^r{}_{\lambda\varphi\sigma}\partial^s\bar{D}i\gamma^\sigma\gamma^5 D h^\lambda - \\ - \frac{1}{3}\bar{D}D\partial^r\phi = 0 \\ \frac{1}{3}\bar{D}D\partial_\lambda h^\lambda - \frac{1}{6}(\bar{D}D)^2\phi = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\delta h^r(x, \theta) = \bar{D}\gamma^r\varepsilon(x, \theta), \quad \delta\phi(x, \theta) = \bar{D}\varepsilon(x, \theta) \quad (6)$$

и имеет ограничение на источник

$$(\gamma_r D)_\alpha \bar{J}^r(x, \theta) - D_\alpha \bar{J}(x, \theta) = 0 \quad (7)$$

Если фиксировать калибровку $\phi = 0$, получим из (5) в случае внешнего источника следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}[\square + \frac{1}{4}(\bar{D}D)^2]h^r - \frac{2}{3}\partial^r\partial_\varphi h^s - \frac{1}{6}\varepsilon^r{}_{\lambda\varphi\sigma}\partial^s\bar{D}i\gamma^\sigma\gamma^5 D h^\lambda = \bar{J}^r \\ \frac{1}{3}\bar{D}D\partial_\lambda h^\lambda = \bar{J} \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) инвариантно относительно преобразования

$$\delta h^r(x, \theta) = \bar{D}\gamma^r\varepsilon(x, \theta) \quad (9)$$

при условии $\bar{D}\varepsilon = 0$.

Уравнение (8) является модифицированным вариантом уравнения Огиевского-Сокачева линеаризованной $N = 1$ супергравитации [4-6]. Калибровочное преобразование и ограничение на источник вытекают прямо из уравнения. Калибровочное преобразование (9) угадано в работе [7], ограничение на источник (7) выведено в [4] как условие для супертока, выделяющее из $\bar{J}^r(x, \theta)$ суперспины $3/2$ и 0 .

При $a = b = c = 0$ получим уравнение, рассмотренное в работах [4-6]. Калибровочное преобразование для поля $h^r(x, \theta)$ имеет общий вид (2), но не является линейной по D_α . Из (2)

получается преобразование [8]

$$\delta h^r(x, \theta) = \square \bar{D} \gamma^r \varepsilon(x, \theta) - \frac{i}{2} \partial^r \bar{D} D \cdot \bar{D} \varepsilon(x, \theta) \quad (10)$$

а из (4) ограничение на источник [4,5]

$$[\partial_\mu D_\alpha \bar{D} D + 2 \square (\gamma_\mu D)_\alpha] f^r(x, \theta) = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (8) вытекает компонентное уравнение для симметричного тензорного поля

$$\square h^{\nu\sigma} - \partial^r \partial_\zeta h^{\nu\sigma} - \partial^\nu \partial_\zeta h^{\sigma r} + \eta^{\nu\sigma} \partial_\zeta \partial_\sigma h^{\sigma\sigma} - \frac{1}{3} (\square \eta^{\nu\sigma} - \partial^r \partial^\sigma) h^{\sigma\sigma} = f^{\nu\sigma} \quad (12)$$

с калибровочным преобразованием $\delta h^{\nu\sigma} = \partial^\nu \varepsilon^\sigma + \partial^\sigma \varepsilon^\nu - 2 \eta^{\nu\sigma} \partial_\zeta \varepsilon^\zeta$ и ограничением на источник $\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0$. Полученное уравнение отличается от линеаризованного уравнения Эйнштейна и от линеаризованного уравнения релятивистской теории гравитации. Функция Грина уравнения (12) имеет вид

$$G^{\nu\sigma}_{\zeta\sigma} = \frac{1}{2\square} (\eta^\nu_\zeta \eta^\sigma_\sigma + \eta^\sigma_\zeta \eta^\nu_\sigma + \eta^{\nu\sigma} \eta_{\zeta\sigma}). \quad (13)$$

Рассмотренный здесь формализм применим и в случае N - расширенной суперсимметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loide R.-K. // J.Phys.A.:Math. Gen. 1985. V.18. P. 2833.
2. Лойде Р.-К., Суурварик П. // Изв. АН ЭССР, Физ.Матем. 1985. Т. 34.
3. Суурварик П. Препринт F-43, Тарту, 1985.
4. Огиевецкий В.И., Сокачев Э. В кн.: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля: Мат. IY Междунар. совещания по нелок. теориям поля. Алушта, 1976. Дубна, 1976. С. 183-203.
5. Ogilevetsky V., Sokatchev E. Preprint E2-9985, Dubna, 1976.
6. Ogilevetsky V., Sokatchev E. // Nucl.Phys. 1977. V.B124.P.309
7. Ferrara S., Zumino B. // Nucl.Phys. 1978. V.B134. P. 301.
8. Namazie M.A., Storey D. // Nucl.Phys. 1979. V.B157. P. 170.

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ

Р.-К.Р. Лойде, А.Р. Польш

Таллинский политехнический институт (Таллин),
Институт физики АН ЭССР (Тарту)

Исходя из массивного уравнения спина 2 [1], получим общее безмассовое калибровочно-инвариантное уравнение для симметричного тензорного поля $h^{\mu\nu}$

$$\square h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial^\nu \partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \partial^\mu \partial^\nu h^\lambda{}_\lambda + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + ab - \frac{a+b}{2\sqrt{3}}\right) \eta^{\mu\nu} \square h^\lambda{}_\lambda = 0, \quad (1)$$

где a и b два произвольных ненулевых параметра. Калибровочное преобразование имеет вид

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2a}\right) \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \varepsilon^\lambda. \quad (2)$$

Внешний источник $f^{\mu\nu}$ имеет ограничение

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2b}\right) \partial^\nu f^\lambda{}_\lambda = 0. \quad (3)$$

Инвариантная билинейная форма имеет вид

$$\tilde{h}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = h^+_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{b}\right) h^+{}^\lambda{}_\lambda h^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \quad (4)$$

Уравнение (1) выводится из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\partial^\lambda h^+_{\mu\nu} \partial_\lambda h^{\mu\nu} + 2\partial^\lambda h^+_{\mu\nu} \partial^\mu h^{\lambda\nu} + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) (\partial_\lambda h^+{}^\lambda{}_\lambda \partial^\mu h^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} + \\ + \partial^\lambda h^+_{\mu\nu} \partial^\mu h^{\lambda\nu}{}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + a^2 - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \partial^\lambda h^+{}^\lambda{}_\lambda \partial_\lambda h^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \quad (5)$$

варьированием относительно сопряженной функции $\tilde{h}_{\mu\nu}$.

Для уравнения (1) можно выбрать ковариантную калибровку

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right) \partial^\nu h^\lambda{}_\lambda = 0. \quad (6)$$

Функция Грина уравнения (1) в калибровке (6) имеет вид

$$G^{\mu\nu}{}_{\lambda\sigma} = \frac{1}{\square} \left[\frac{1}{2} (\eta^\mu{}_\lambda \eta^\nu{}_\sigma + \eta^\mu{}_\sigma \eta^\nu{}_\lambda) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{4ab}\right) \eta^{\mu\nu} \eta^\lambda{}_\sigma \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим два преобразования параметров a и b .

I) Преобразование $a \rightarrow a$, $b \rightarrow kb$ ($k \neq 0$) оставляет инвариантным лагранжиан и выделяет подмножество уравнений.

соответствующих одному и тому же калибровочному преобразованию, но различным билинейным формам и ограничения на источник. Преобразование $a \rightarrow a$, $b \rightarrow \kappa b$ эквивалентно следующему переопределению уравнения (I): $W^{\mu\nu} + \frac{\kappa-1}{4} \eta^{\mu\nu} W^\xi_\xi = 0$, где уравнение (I) обозначено через $W^{\mu\nu} = 0$. 2) Преобразование $a \rightarrow \kappa a$, $b \rightarrow b$ ($\kappa \neq 0$) выделяет подмножество уравнений, соответствующих одному и тому же ограничению на источник, но различным билинейным формам и калибровочным преобразованиям. Преобразование $a \rightarrow \kappa a$, $b \rightarrow b$ эквивалентно следующему переопределению полевых переменных: $h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} + \frac{\kappa-1}{4} \eta^{\mu\nu} h^\xi_\xi$.

Линеаризованное уравнение Эйнштейна, применяемое в супергравитации [2], соответствует параметрам $a = b = -\sqrt{3}/2$

$$\square h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\xi h^{\xi\nu} - \partial^\nu \partial_\xi h^{\xi\mu} + \partial^\mu \partial^\nu h^\xi_\xi + \eta^{\mu\nu} \partial_\xi \partial_\xi h^{\xi\xi} - \eta^{\mu\nu} \square h^\xi_\xi = 0. \quad (8)$$

Из (2), (3) и (6) получим

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu, \quad \partial_\mu \mathcal{J}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu h^\mu_\mu = 0. \quad (9)$$

В релятивистской теории гравитации [3,4] применяется уравнение, которое соответствует $a = b = \sqrt{3}/2$

$$\square h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\xi h^{\xi\nu} - \partial^\nu \partial_\xi h^{\xi\mu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \square h^\xi_\xi = 0. \quad (10)$$

Из (2), (3) и (6) получим

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\xi \epsilon^\xi, \quad \partial_\mu \mathcal{J}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu \mathcal{J}^\mu_\mu = 0, \quad \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) следует применять и в ковариантной теории замкнутых бозе струн [5], где требуется поле $h^{\mu\nu}$, удовлетворяющее $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$. В данном случае последнее условие вытекает из выбора калибровки.

Функций Грина уравнений (8) и (10) совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loide R.-K. // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. Vol. 18. P. 2833.
2. Van Nieuwenhuizen P. // Phys. Rep. 1981. Vol. 68. P. 189.
3. Логунов А.А., Лоскутов Ю.М. // ТМФ. 1986. Т. 67. С. 163.
4. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. // ТМФ. 1986. Т. 67. С. 323.
5. Neveu A., West P.C. // Nucl. Phys. 1986. Vol. B268. P. 125.

НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ И ПИОННАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

Ю.Л.Вартанян, Г.Б.Алавердян, Г.С.Аджян

Ереванский госуниверситет (Ереван)

Путем численного решения релятивистских уравнений гидростатического равновесия (уравнения Толмена - Оппенгеймера - Волкова), дополненных уравнением для определения релятивистского момента инерции, исследуются интегральные характеристики и внутреннее строение холодных сферически-симметричных небесных тел, вещество которых содержит развитый пионный конденсат.

Явление пионной конденсации [1], как известно, приводит к ван-дер-ваальсовскому характеру уравнения состояния $P(n)$ (P - давление, n - плотность барионов). При этом оказывается, что энергия \mathcal{E} , приходящаяся на один барион, как функция плотности барионов в зависимости от значения недостаточно точно определенного из теории сильного взаимодействия многих частиц параметра $\alpha = g_A^2(1-\delta)/F^2$ (g_A - аксиальная константа, F - константа распада пионов, а δ - фактор, учитывающий корреляционные эффекты) может иметь как отрицательный минимум ($\mathcal{E}_{\min} < 0$), так и положительный ($\mathcal{E}_{\min} > 0$). Это обстоятельство приводит к двум альтернативным возможностям:

а) Если в природе реализуется случай $\mathcal{E}_{\min} < 0$, то одновременное сосуществование развитого пионного конденсата и нормального вещества нейтронной звезды невозможно. Звезда с центральной плотностью больше порога рождения пионного конденсата в этом случае состоит только из π -конденсированного вещества, так что помимо белых карликов и нейтронных звезд может существовать новая ветвь сверхплотных устойчивых космических объектов, названных пионными звездами [2,3]. Плотность на поверхности таких звезд скачкообразно падает от сверхядерных значений до нуля. Кельвиновское время остывания таких объектов обусловлено только фотонным каналом потерь энергии и гораздо меньше, чем у обычных нейтронных звезд. Протекание специфических ядерных процессов на поверхности пионных звезд при аккреции вещества может привести к феномену

γ - пульсара. Здесь мы не рассматриваем более плотные объекты - странные звезды, состоящие из кваркового вещества [4].

б) Если же пионная конденсация хоть и приводит к минимуму \mathcal{E} , но $\mathcal{E}_{\min} > 0$, то при плотностях больше пороговой плотности рождения π -конденсата происходит фазовый переход первого рода со скачком плотности. Звезда из такого вещества в области центральных плотностей выше порога рождения конденсата является слоистым объектом, в центре которого находится сверхплотное ядро из π -конденсированного вещества, а оболочка состоит из обычного вещества нейтронной звезды.

Вычисления проводились с четырьмя разными уравнениями состояния, полученными путем комбинации двух уравнений состояния нормального вещества Пандерипанде (PN) и Бете-Джонсона (BJ) с несколькими значениями параметра развитого пионного конденсата α .

Уравнение состояния PN $\alpha=0,6$ приводит к случаю $\mathcal{E}_{\min} < 0$ (пионные звезды). Для трех других уравнений состояния $\mathcal{E}_{\min} > 0$ и возможен фазовый переход первого рода с параметрами, приведенными в таблице.

Уравнение состояния	n_1 fm^{-3}	ρ_1 10^{15} г/см^3	n_2 fm^{-3}	ρ_2 10^{15} г/см^3	ρ_0 10^{14} г/см^3
PN $\alpha = 0,475$	0,198	0,338	0,985	1,713	0,546
BJ $\alpha = 0,411$	0,471	0,845	0,674	1,280	8,311
BJ $\alpha = 0,5$	0,322	0,568	0,655	1,180	3,166

На Рис.1 представлены результаты численного расчета радиальной ($e^\lambda = g_{rr}$) и временной ($e^\nu = g_{00}$) компонент метрического тензора в зависимости от расстояния до центра звезды. Кривая 1 соответствует конфигурации пионной звезды с массой $M=1,15 M_\odot$ в случае уравнения состояния PN $\alpha=0,6$, кривая 2 - конфигурации слоистой звезды с массой $M=1,12 M_\odot$ в случае уравнения состояния BJ $\alpha=0,5$. Излом кривой e^λ в случае 1 происходит на поверхности пионной звезды, а в случае 2 - на поверхности ядра слоистой нейтронной звезды.

На Рис.2 представлена зависимость массы M от радиуса R . Кривая 1 соответствует случаю пионной звезды, кривые 2-4 —

слоистым звездам с \mathcal{L} - конденсатным ядром.

В случае слоистых звезд кривая $M - R$ имеет излом в точке, соответствующей критической конфигурации с центральным давлением P_0 (P_0 - давление фазового перехода).

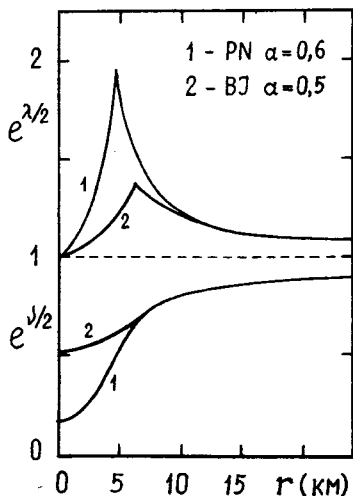


Рис.1.

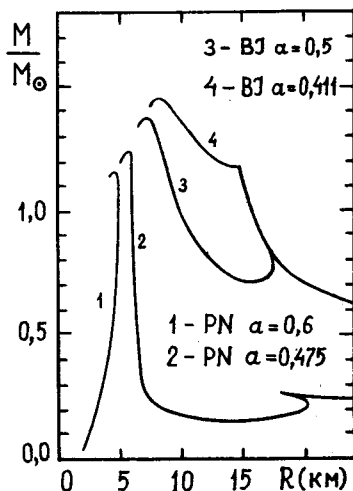


Рис.2.

При значениях параметра скачка плотности $\lambda = \rho_2/(\rho_1 + \rho_2/c^2)$ больше $3/2$ кривая $M - R$ зависимости имеет локальный пилообразный максимум (кривые 2 и 3 на Рис.2.). Конфигурации с маленькими ядрами в этом случае неустойчивы относительно радиальных колебаний, что может приводить к взрывообразному выделению энергии, наподобие взрыва сверхновой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигдал А.Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
2. Hartle J.B.//Astrophys.J. 1967. Vol.150. P.1005.
3. Вартанян Ю.Л., Адян Г.С., Алавердян Г.Б.//Астрон. ж. 1984. Т.61. С.677.
4. Alcock Ch., Farhi E., Olinto A.//Astrophys. J. 1986. Vol.310. P.261.
Haensel P., Zdunik J.L., Schaeffer R.//Astron.Astrophys. 1986. Vol.160. P.121.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авакян Р.М.	22	Манкин Р.И.	106
Аджян Г.С.	125	Масар Э.	109
Алавердян Г.Б.	125	Мелкумова Е.Ю.	64
Алексеев Г.А.	6	Мельников В.Н.	114
Алиев А.Н.	55	Митковский В.С.	53
Арутюнян Г.Г.	86	Мицкевич Н.В.	30, 85
Багров В.Г.	82, 92, 95	Нестеров А.И.	50
Башков В.И.	73	Обухов В.В.	82, 95
Вартанян Ю.Л.	125	Орлянский О.Ю.	25
Весман Э.А.	70	Осетрин К.Е.	82
Вильяльбо В.	98	Пало К.П.	39
Власов А.А.	76	Папоян В.В.	86
Выолый Ю.П.	74	Парновский С.Л.	13, 16
Гаврилов В.Р.	112	Польт А.Р.	123
Гальцов Д.В.	55, 109	Сингатуллин Р.С.	61
Горбачев А.К.	103	Суурварик П.А.	120
Григорян О.А.	89	Таммело Р.Р.	67, 70
Евсеевич А.А.	92	Тимошенко А.И.	100
Заришов М.Н.	19	Унт В.А.	33
Ивашук В.Д.	114	Хачатрян Б.В.	89
Ильичев А.Т.	10	Хлебников В.И.	64
Ихерманн А.А.	42	Чубарян Э.В.	89
Кайгородов В.Р.	48	Чугреев Ю.В.	79
Карабут П.В.	79	Шаповалов А.В.	53, 92
Коппель А.А.	36, 39, 42, 45	Шарма Санджай	85
Коркина М.П.	25	Шишкин Г.В.	98, 100
Костюкович Н.Н.	58		
Кречет В.Г.	28		
Кууск П.Х.	117		
Лембер Т.Р.	45		
Лойде Р.-К.Р.	120, 123		